



Département Sciences du Numérique

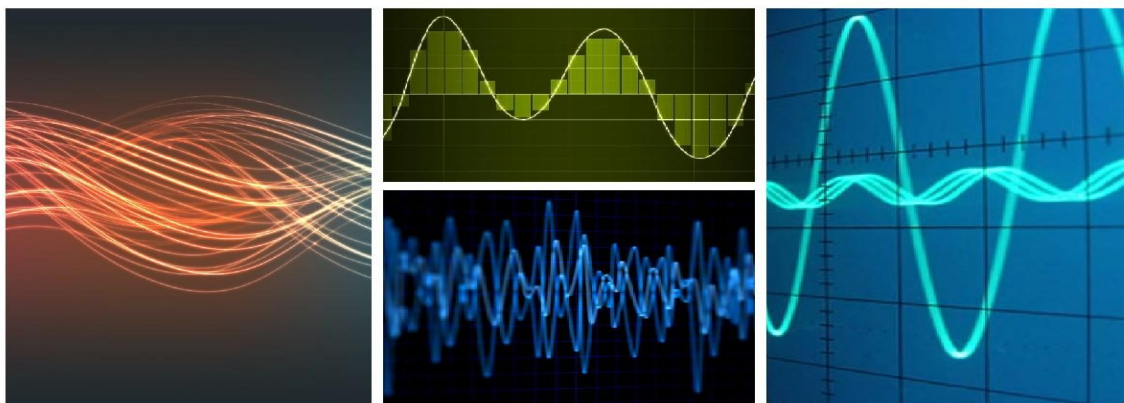
1SN

---

Traitement du Signal  
*Exercices et Problèmes résolus*

---

*Auteurs : C. Mailhes, N. Thomas, J.-Y. Tourneret, C. Poulliat*



Version 1.0 du

5 octobre 2022

*First release, Spring 2022*



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Signaux et systèmes à temps continu</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Rappels</b> .....	<b>9</b>
<b>1.1</b>	<b>Transformée de Fourier</b>	<b>9</b>
1.1.1	Definitions .....	9
1.1.2	Propriétés générales .....	9
<b>1.2</b>	<b>Table de Transformées de Fourier usuelles</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Signaux</b> .....	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Corrélations et Spectres</b> .....	<b>15</b>
<b>3.1</b>	<b>Exercices de Base</b>	<b>15</b>
<b>3.2</b>	<b>Exercices plus difficiles</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>Filtrage linéaire</b> .....	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>Filtrage non linéaire</b> .....	<b>83</b>
<b>6</b>	<b>Processus aléatoires</b> .....	<b>95</b>
<b>7</b>	<b>Prédiction</b> .....	<b>101</b>

---

<b>II</b>	<b>Signaux et systèmes à temps discret</b>	<b>105</b>
<b>1</b>	<b>Numérisation du signal</b> .....	<b>107</b>
1.1	Rappels	107
1.2	Exercices	108
<b>2</b>	<b>Transformée de Fourier Discrète</b> .....	<b>127</b>
2.1	Rappels	127
2.2	Exercices	128
<b>3</b>	<b>Transformée en z</b> .....	<b>135</b>
3.1	Rappels	135
3.2	Exercices	136
<b>4</b>	<b>Filtrage Linéaire</b> .....	<b>139</b>
4.1	Rappels	139
4.2	Exercices	140
	<b>Bibliographie</b> .....	<b>155</b>

**Première partie**

**Signaux et systèmes à temps continu**





# 1. Rappels

## 1.1 Transformée de Fourier

### 1.1.1 Définitions

**Définition 1.1.1 Transformées de Fourier et Fourier Inverse**

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{+i2\pi ft} df$$

### 1.1.2 Propriétés générales

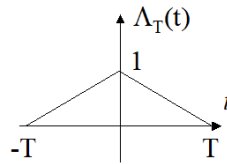
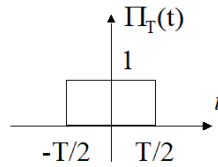
**T.F.**

$ax(t) + by(t)$	$\Leftrightarrow$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	$\Leftrightarrow$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\Leftrightarrow$	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at + b)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\Leftrightarrow$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
$\int_{\mathbb{R}}  x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}}  X(f) ^2 df$	

## 1.2 Table de Transformées de Fourier usuelles

T.F.	
1	$\Leftrightarrow \delta(f)$
$\delta(t)$	$\Leftrightarrow 1$
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\Leftrightarrow \delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\Leftrightarrow e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\Leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - \frac{k}{T})$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\Leftrightarrow \frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	$\Leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\Leftrightarrow e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\Leftrightarrow T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \operatorname{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\Leftrightarrow T \operatorname{sinc}^2(\pi T f)$
$B \operatorname{sinc}(\pi B t)$	$\Leftrightarrow \Pi_B(f)$
$B \operatorname{sinc}^2(\pi B t)$	$\Leftrightarrow \Lambda_B(f)$



**!!!!!! Attention!!!!!!**

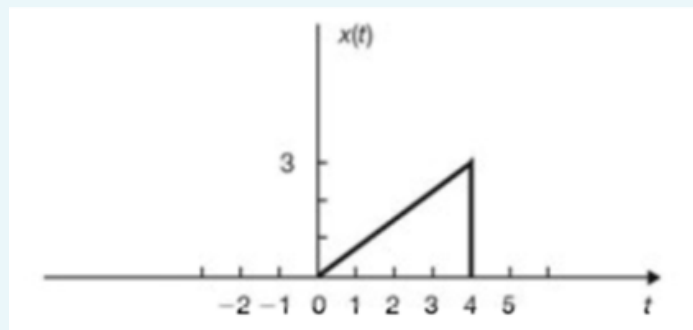
$\Pi_T(t)$  note une fenêtre rectangulaire de support égal à  $T$ .

$\Lambda_T(t)$  note une fenêtre triangulaire de support égal à  $2T$  (de demi-base égale à  $T$ ).

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$$

## 2. Signaux

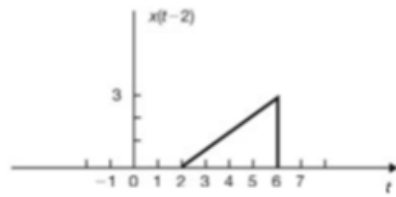
**Exercice 2.1** Le signal continu  $x(t)$  est donné par la figure suivante.



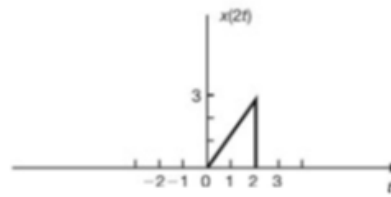
Représentez les signaux suivants :

1.  $x(t - 2)$
2.  $x(2t)$
3.  $x(t/2)$
4.  $x(-t)$

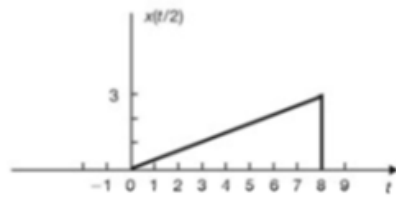
Correction.



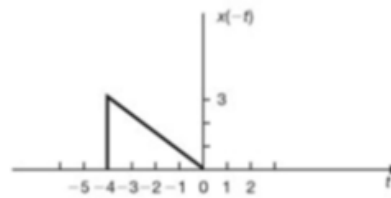
(a)



(b)



(c)



(d)

**Exercice 2.2** Déterminer pour chacun des signaux suivants la classe de signaux correspondante :

1.  $x(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$
2.  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$
3.  $x(t) = A$
4.  $x(t) = tu(t)$

où

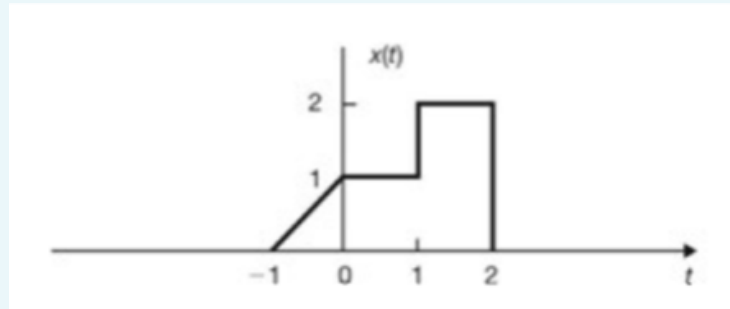
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

est la fonction échelon unité.

Correction.

1. énergie finie,
2. périodique de puissance finie,
3. de puissance finie non périodique
4. n'appartient pas aux trois classes de signaux étudiées en cours

**Exercise 2.3** Le signal  $x(t)$  est donné par la figure suivante.



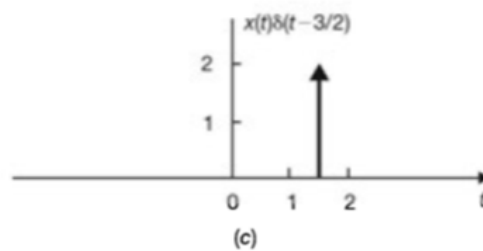
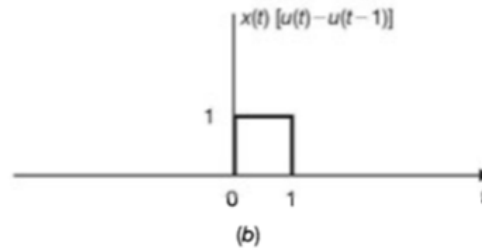
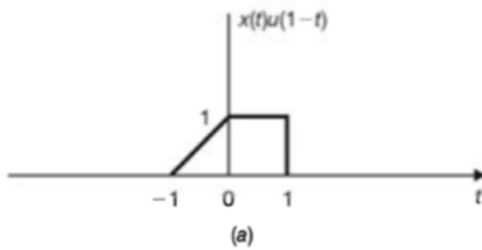
On note

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

et  $\delta(t)$  est l'impulsion de Dirac. Représenter graphiquement les signaux suivants :

1.  $x(t)u(1-t)$
2.  $x(t)[u(t) - u(t-1)]$
3.  $x(t)\delta(t - \frac{3}{2})$

*Correction.*



■



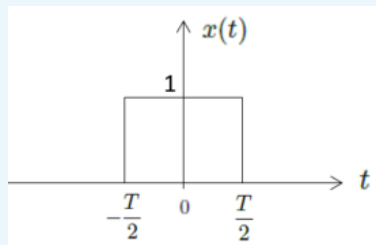
## 3. Corrélations et Spectres

Par simplicité, la notion de **stationarité** est confondue dans ce polycopié avec **la stationnarité au sens large** (appelée aussi **stationnarité au second ordre**).

### 3.1 Exercices de Base

#### Exercice 3.1 — Etude d'un signal constant sur la durée $T$ .

On considère dans cet exercice le signal suivant :



Signal constant de durée  $T$

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 \quad t \in [-T/2, T/2] \\ &= 0 \quad \text{ailleurs}\end{aligned}$$

Préciser la classe à laquelle appartient le signal  $x(t)$  puis déterminer sa fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  (en distinguant les cas  $\tau > 0$  et  $\tau < 0$ ) et sa densité spectrale de puissance ou d'énergie  $s_x(f)$ . ■

*Correction.*

Le signal est déterministe à énergie finie car

$$E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T < \infty$$

Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par :

$$R_x(\tau) = \int_R x(t)x^*(t-\tau)dt$$

Pour  $\tau > 0$  : si  $\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2}$ , soit  $\tau > T$ , on a  $R_x(\tau) = 0$  (supports des portes disjointes), si  $\tau - \frac{T}{2} \leq \frac{T}{2}$ , soit  $0 < \tau \leq T$ , on a  $R_x(\tau) = \int_{\tau-T/2}^{T/2} dt = T - \tau$ . Par symétrie, on obtient alors  $R_x(\tau) = T\Lambda_T(\tau)$  (figure 3.1), où  $\Lambda_T(\tau)$  représente le triangle de demi base  $T$  et de hauteur 1.

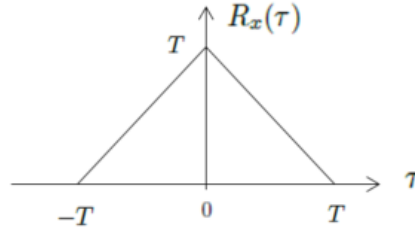


FIGURE 3.1 – Fonction d'autocorrélation du signal constant de durée  $T$

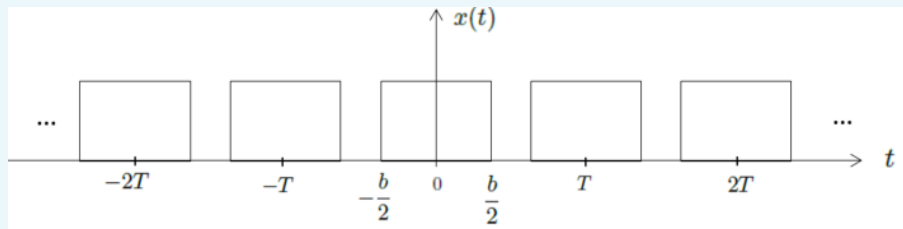
Sa densité spectrale d'énergie (DSE) est donnée par :

$$s_x(f) = TF [R_x(\tau)] = T \times T \text{sinc}^2(\pi fT) = T^2 \text{sinc}^2(\pi fT).$$

**Remarque** : on retrouve bien  $s_x(f) = |X(f)|^2$  (signal à énergie finie), où  $X(f)$  représente la transformée de Fourier de  $x(t)$ . ■

### Exercice 3.2 — Etude d'un signal périodique.

On considère dans cet exercice le signal  $x(t)$  suivant :



Signal périodique à étudier.

Déterminer la transformée de Fourier du signal  $X(f)$ , sa fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et sa densité spectrale de puissance ou d'énergie  $s_x(f)$ . ■

*Correction.*

On peut écrire le signal de la manière suivante :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Pi_b(t - kT) = \Pi_b(t) * \bigsqcup_T(t)$$



où  $\text{III}_T(t)$  représente le peigne de Dirac de largeur  $T$ , i.e.,  $\text{III}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$ . On a alors :

$$X(f) = b \text{sinc}(\pi f b) \times \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{b}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\pi b \frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right).$$

Le signal est déterministe à puissance finie périodique, de période  $T$ . Sa fonction d'autocorrélation s'écrit donc  $R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t - \tau)dt$ . C'est une fonction paire et périodique de période  $T$  telle que  $R_x(\tau + kT) = R_x(\tau)$ . On peut donc se limiter au calcul sur une période. Ce calcul a été réalisé dans l'exercice précédent. On obtient donc ici, en périodisant :

$$R_x(\tau) = \frac{b}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_b(\tau - kT).$$

Sa densité spectrale de puissance (DSP) est donnée par :

$$\begin{aligned} s_x(f) &= TF[R_x(\tau)] = TF\left[\frac{b}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_b(\tau) * \delta(\tau - kT)\right] = \frac{b}{T} TF[\Lambda_b(\tau) \#(\tau)] \\ &= \frac{b}{T} b \text{sinc}^2(\pi b f) \times \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{b^2}{T^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}^2\left(\pi \frac{bk}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

■

### Exercice 3.3 — Durée équivalente d'un signal.

On considère un signal déterministe défini par  $x(t) = A\Lambda_T(t)$  où  $\Lambda_T(\tau)$  est la fonction triangle définie par

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. On suppose dans un premier temps que  $A$  est une amplitude réelle positive.
  - (a) Après avoir déterminé la classe du signal  $x(t)$  (aucun calcul n'est nécessaire ici), déterminer la densité spectrale du signal  $x(t)$  que l'on notera  $s_x(f)$ . On suppose que l'on sait calculer le produit de convolution  $\Lambda_T(\tau) * \Lambda_T(\tau)$  que l'on notera  $c(\tau)$ . Donner l'expression de la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$  à l'aide de la fonction  $c$ .
  - (b) Que représente la quantité  $R_x(0)$ ? Déterminer  $R_x(0)$  en fonction de  $A$  et  $T$ ?
  - (c) On définit la durée équivalente du signal  $x(t)$  comme la durée  $\Delta T$  d'un signal constant dont l'amplitude est égale à l'amplitude maximale du signal  $x(t)$  (notée  $A_{\max}$ ) et de même énergie que  $x(t)$ . En d'autres termes,  $\Delta T$  est défini par

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt = \left(|A_{\max}|^2\right) \Delta T.$$

Déterminer  $\Delta T$  pour le signal  $x(t) = A\Lambda_T(t)$ .

2. On suppose dans un second temps que  $A$  est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle  $[0, A_{\max}]$ .
  - (a) Déterminer  $E[x^2(t)]$ . Le signal  $x(t)$  est-il stationnaire?
  - (b) On propose de définir la durée équivalente d'un signal aléatoire  $x(t)$  comme la durée

$\Delta T$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}} E [x^2(t)] dt = (|A_{\max}|^2) \Delta T.$$

Déterminer  $\Delta T$  pour le signal  $x(t) = A\Lambda_T(t)$ .

*Correction.*

1. Signal à amplitude réelle :

- (a)  $x(t)$  est un signal à énergie finie car il est défini sur un intervalle de temps de durée finie. La densité spectrale d'énergie d'un signal à énergie finie est  $s_x(f) = |X(f)|^2$ , où  $X(f)$  est la transformée de Fourier du signal  $x(t)$ . En s'aidant des tables, on obtient

$$s_x(f) = A^2 T^2 \operatorname{sinc}^4(\pi f T)$$

et donc

$$R_x(\tau) = A^2 \operatorname{TF}^{-1} [T \operatorname{sinc}^2(\pi f T)] * \operatorname{TF}^{-1} [T \operatorname{sinc}^2(\pi f T)] = A^2 c(\tau)$$

- (b)  $R_x(0)$  est l'énergie du signal  $x(t)$  qui peut se calculer très facilement comme suit

$$R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} |x^2(t)| dt = 2 \left[ \int_0^T A^2 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt \right] = \frac{2A^2 T}{3}.$$

- (c) En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient

$$\frac{2A^2 T}{3} = (|A_{\max}|^2) \Delta T = A^2 \Delta T$$

d'où

$$\Delta T = \frac{2T}{3}$$

2. Signal à amplitude aléatoire :

- (a) Comme  $A$  est une variable aléatoire, le signal  $x(t)$  est aléatoire. On a

$$E [x^2(t)] = E [A^2 \Lambda_T^2(t)] = \Lambda_T^2(t) E [A^2] = \frac{A_{\max}^2}{3} \Lambda_T^2(t)$$

Comme  $E [x^2(t)]$  dépend de  $t$ , le signal  $x(t)$  n'est pas stationnaire.

- (b) D'après la question précédente, on a

$$\int_{\mathbb{R}} E [|x^2(t)|] dt = \frac{A_{\max}^2}{3} \int_{\mathbb{R}} \Lambda_T^2(t) dt = \frac{A_{\max}^2}{3} \times \frac{2T}{3} = \frac{2TA_{\max}^2}{9}$$

d'où

$$\Delta T = \frac{2T}{9}.$$

■

**Exercice 3.4** Soit  $A(t)$  un processus aléatoire stationnaire centré. On construit :

$$B_a(t) = (A(t) + a)e^{i2\pi f_0 t}$$

où  $a$  et  $f_0$  sont des constantes déterministes réelles et où  $t$  désigne le temps.

À quelle(s) condition(s), le processus aléatoire  $B_a(t)$  est-il stationnaire ? Calculer la densité spectrale de puissance en fonction de celle de  $A(t)$ . ■

*Correction.*

Le processus aléatoire  $B_a(t)$  est stationnaire si sa moyenne  $E[B_a(t)]$  et sa fonction d'autocorrélation  $E[B_a(t)B_a^*(t - \tau)]$  sont indépendantes du temps.

**Moyenne**

$$E[B_a(t)] = \{E[A(t)] + a\}e^{i2\pi f_0 t} = ae^{i2\pi f_0 t}$$

$E[B_a(t)]$  est donc indépendant de  $t$  si et seulement si  $a = 0$ .

**Fonction d'autocorrélation**

$$E[B_a(t)B_a^*(t - \tau)] = E[(A(t) + a)(A^*(t - \tau) + a)]e^{i2\pi f_0 \tau}$$

$$\begin{aligned} E[B_a(t)B_a^*(t - \tau)] &= E[(A(t) + a)(A^*(t - \tau) + a)]e^{i2\pi f_0 \tau} \\ &= [R_A(\tau) + a^2]e^{i2\pi f_0 \tau} \end{aligned}$$

où  $R_A(\tau)$  est la fonction d'autocorrélation de  $A(t)$ . La fonction d'autocorrélation de  $B_a(t)$  est donc indépendante de  $t$ . On en déduit donc que  $B_a(t)$  est stationnaire si et seulement si  $a = 0$ .

La densité spectrale de  $B_a(t)$  est

$$\begin{aligned} s_{B_a}(f) &= [s_A(f) + a^2\delta(f)] * \delta(f - f_0) \\ &= s_A(f - f_0) + a^2\delta(f - f_0) \end{aligned}$$

■

**Exercice 3.5 — Signal OFF-ON.**

On considère le signal  $x(t)$  défini par

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0, T] \\ -A & \text{si } t \in [-T, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $A$  et  $T$  sont des constantes positives. Le signal  $x(t)$  est-il à énergie finie ou à puissance finie ? Déterminer l'énergie, la puissance moyenne, la densité spectrale et la fonction d'autocorrélation du signal  $x(t)$ . ■

*Correction.*

Le signal  $x(t)$  est à énergie finie car

$$E = \int_{\mathbb{R}} x^2(t)dt = \int_{-T}^T A^2 dt = 2TA^2.$$

La puissance de  $x(t)$  est donc

$$P = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} x^2(t) dt = 0.$$

On peut remarquer que  $x(t)$  s'écrit

$$x(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) - A\Pi_T\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

Donc sa transformée de Fourier s'écrit

$$\begin{aligned} X(f) &= A \exp(j\pi fT) T \operatorname{sinc}(\pi fT) - A \exp(-j\pi fT) T \operatorname{sinc}(\pi fT) \\ &= 2jAT \operatorname{sinc}(\pi fT) \sin(\pi fT) \end{aligned}$$

et sa densité spectrale de puissance est

$$s_x(f) = |X(f)|^2 = 4A^2T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi fT) \sin^2(\pi fT)$$

La fonction d'autocorrélation de  $x(t)$  est donc

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= (4A^2T) \operatorname{TF}^{-1} [T \operatorname{sinc}^2(\pi fT)] * \operatorname{TF}^{-1} [\sin^2(\pi fT)] \\ &= 4A^2T \Lambda_T(\tau) * \operatorname{TF}^{-1} \left[ \frac{1 - \cos(2\pi fT)}{2} \right] \\ &= 2A^2T \Lambda_T(\tau) * \left[ \delta(\tau) - \frac{1}{2}\delta(\tau - T) - \frac{1}{2}\delta(\tau + T) \right] \\ &= A^2T [2\Lambda_T(\tau) - \Lambda_T(\tau - T) - \Lambda_T(\tau + T)] \end{aligned}$$

■

### Exercice 3.6 — Somme de deux cosinus.

On considère le signal  $x(t)$  défini par

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + B \cos(\pi f_0 t)$$

où  $A, B$  et  $f_0$  sont des constantes positives. Déterminer la puissance, la densité spectrale et la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$ . ■

*Correction.*

$x(t)$  est un signal périodique de période  $\frac{T_0}{2}$ . Sa décomposition en série de Fourier est

$$x(t) = \frac{A}{2} \exp(j2\pi f_0 t) + \frac{A}{2} \exp(-j2\pi f_0 t) + \frac{B}{2} \exp(j\pi f_0 t) + \frac{B}{2} \exp(-j\pi f_0 t)$$

par application directe du cours, on en déduit sa densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0) + \frac{B^2}{4} \delta\left(f - \frac{f_0}{2}\right) + \frac{B^2}{4} \delta\left(f + \frac{f_0}{2}\right)$$

Sa fonction d'autocorrélation s'écrit alors

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{A^2}{4} \exp(j2\pi f_0 \tau) + \frac{A^2}{4} \exp(-j2\pi f_0 \tau) + \frac{B^2}{4} \exp(j\pi f_0 \tau) + \frac{B^2}{4} \exp(-j\pi f_0 \tau) \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{B^2}{2} \cos(\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

**Exercice 3.7 — Somme de deux cosinus (variante).**

On suppose que  $A$  et  $B$  sont deux variables aléatoires indépendantes de moyennes nulles et de variances  $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$ . On construit le signal

$$X(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

où  $\omega$  est une constante positive. Le signal  $X(t)$  est-il stationnaire? Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal  $X(t)$ .

*Correction.*

La moyenne du signal  $X(t)$  est

$$E[X(t)] = E[A] \cos(\omega t) + E[B] \sin(\omega t) = 0.$$

La fonction d'autocorrélation du signal  $X(t)$  est définie par

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= E\{[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)][A \cos(\omega(t-\tau)) + B \sin(\omega(t-\tau))]\} \\ &= E[A^2] \cos(\omega t) \cos[\omega(t-\tau)] + E[AB] \cos(\omega t) \sin[\omega(t-\tau)] \\ &\quad + E[AB] \sin(\omega t) \cos[\omega(t-\tau)] + E[B^2] \sin(\omega t) \sin[\omega(t-\tau)] \end{aligned}$$

Puisque les variables aléatoires  $A$  et  $B$  sont indépendantes et de moyennes nulles, on a

$$E[AB] = E[A]E[B] = 0$$

De plus,  $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$ , d'où

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= \sigma^2 \{ \cos(\omega t) \cos[\omega(t-\tau)] + \sin(\omega t) \sin[\omega(t-\tau)] \} \\ &= \sigma^2 \cos(\omega \tau) \\ &= R_X(\tau). \end{aligned}$$

Puisque la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal  $X(t)$  sont indépendantes du temps, le signal  $X(t)$  est stationnaire. Sa fonction d'autocorrélation a été déterminée ci-dessus. La densité spectrale de puissance du signal  $X(t)$  est

$$\begin{aligned} s_X(f) &= \text{TF}[R_X(\tau)] \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \left[ \delta\left(f - \frac{\omega}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{\omega}{2\pi}\right) \right] \end{aligned}$$

**Exercice 3.8 — Estimation d'une fonction d'autocorrélation.**

On considère un signal déterministe périodique

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

où  $A$  est une amplitude réelle positive et  $f_0$  est une fréquence (également positive).

1. Déterminez la fonction d'autocorrélation, la puissance et la densité spectrale de puissance du signal  $x(t)$  que l'on notera respectivement  $R_X(\tau)$ ,  $P_x$  et  $s_x(f)$ .

2. En pratique, on ne peut observer le signal  $x(t)$  que sur une durée finie  $T$  et donc on a uniquement accès au signal  $x_T(t) = x(t)\Pi_T(t - \frac{T}{2})$  (où  $\Pi_T(t)$  est définie dans les tables).

(a) A quelle classe de signaux appartient le signal  $x_T(t)$  ?

(b) Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal  $x_T(t)$  notée  $R_T(\tau)$  (on fera le calcul pour  $\tau > 0$  et on utilisera la parité de  $R_T(\tau)$ ).

3. On construit l'estimateur

$$\widehat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T}R_T(\tau)$$

(a) Montrer que  $\widehat{R}_x(\tau)$  se décompose sous la forme  $R_1(\tau) + R_2(\tau)$  avec

$$R_1(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \Lambda_T(\tau)$$

où la fonction triangle  $\Lambda_T(\tau)$  est définie par (voir aussi tables)

$$\Lambda_T(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} & \text{si } |\tau| < T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Montrer que  $R_1(\tau)$  et  $R_2(\tau)$  tendent respectivement vers  $R_x(\tau)$  et 0 lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$ .

4. On suppose que  $T$  est suffisamment grand pour avoir  $\widehat{R}_x(\tau) \approx R_1(\tau)$ .

(a) En déduire une expression approchée de  $s_x(f)$  définie par  $\widehat{s}_x(f) = s_1(f)$  où  $s_1(f) = \text{TF}[R_1(\tau)]$ .

(b) Représenter graphiquement  $s_x(f)$  et  $\widehat{s}_x(f)$ .

(c) On désire estimer la puissance du signal  $x(t)$  à partir de  $s_1(f)$ . Quel estimateur  $\widehat{P}_x$  proposez-vous ? Calculer  $\widehat{P}_x$  dans le cas du signal  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ .

*Correction.*

1. Le signal est déterministe à puissance finie périodique. Nous avons donc :

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)x^*(t - \tau)dt = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$P_x = R_x(0) = \frac{A^2}{2}$$

$$s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

2. (a) Le signal  $x_T(t)$  est déterministe et à énergie finie.

(b) Sa fonction d'autocorrélation est donc définie par

$$R_T(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x_T(t)x_T(t - \tau)dt.$$

Puisque  $x(t)$  est un signal réel, c'est une fonction paire et donc il suffit de la calculer pour  $t > 0$ . On a alors les cas suivants :

— Pour  $\tau > T$ , on a la situation suivante :  $R_T(\tau) = 0$ .

— Pour  $\tau \in [0, T]$ , les signaux  $x_T(t)$  et  $x_T(t - \tau)$  ont le support commun  $[\tau, T]$ , d'où

$$R_T(\tau) = \int_{\tau}^T x_T(t)x_T(t - \tau)dt = \int_0^T A \cos(2\pi f_0 t) A \cos(2\pi f_0(t - \tau)) dt$$

soit

$$\begin{aligned} R_T(\tau) &= \frac{A^2}{2} \int_{\tau}^T [\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau)] dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) (T - \tau) + \frac{A^2}{8\pi f_0} [\sin(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau)]_{\tau}^T \\ &= \frac{A^2 T}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) + \frac{A^2}{8\pi f_0} [\sin(4\pi f_0 T - 2\pi f_0 \tau) - \sin(2\pi f_0 \tau)] \end{aligned}$$

Ainsi pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$R_T(\tau) = \frac{A^2 T}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) + \frac{A^2}{8\pi f_0} [\sin(4\pi f_0 T - 2\pi f_0 |\tau|) - \sin(2\pi f_0 |\tau|)]$$

3.

$$\widehat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} R_T(\tau) \quad (3.1)$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) + \frac{A^2}{8T\pi f_0} [\sin(4\pi f_0 T - 2\pi f_0 |\tau|) - \sin(2\pi f_0 |\tau|)] \quad (3.2)$$

On a bien  $R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$ , avec  $R_1(\tau)$  qui tend vers  $R_x(\tau)$  quand  $T \rightarrow \infty$  et  $R_2(\tau)$  qui tend vers 0 quand  $T \rightarrow \infty$

4. (a)

$$\hat{s}_x(f) = s_1(f) = \text{TF}[R_1(\tau)] \quad (3.3)$$

$$= \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] * T \text{sinc}^2(\pi T f) \quad (3.4)$$

$$= \frac{A^2 T}{4} [\text{sinc}^2(\pi T(f - f_0)t) + \text{sinc}^2(\pi T(f + f_0)t)] \quad (3.5)$$

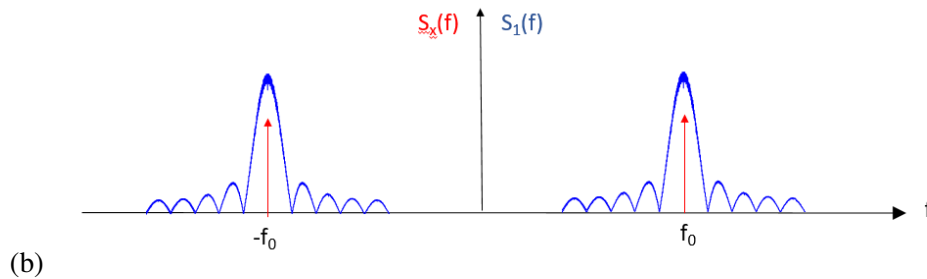


FIGURE 3.2 – Tracé de  $s_x(f)$  et de  $s_1(f)$ .

(c)

$$\hat{P}_x = \int_{\mathbb{R}} S_1(f) df \quad (3.6)$$

$$= \frac{A^2}{4T} \left( \int_{\mathbb{R}} T^2 \text{sinc}^2(\pi T(f - f_0)t) df + \int_{\mathbb{R}} T^2 \text{sinc}^2(\pi T(f + f_0)t) df \right) \quad (3.7)$$

$$= \frac{A^2}{4T} (T + T) = \frac{A^2}{2} \quad (3.8)$$

■

**Exercice 3.9 — Estimation fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance.**

1. Soit  $\hat{R}_1(\tau)$  un estimateur de la fonction d'autocorrélation  $R(\tau)$  tel que :

$$\hat{R}_1(\tau) = R(\tau) \Pi_{2T}(\tau)$$

où  $\Pi_{2T}(\tau)$  est la fenêtre rectangulaire de largeur  $2T$ .

Calculez l'estimateur de la densité spectrale de puissance  $\hat{s}_1(f)$  correspondant :

$$\hat{s}_1(f) = \text{TF} \left[ \hat{R}_1(\tau) \right]$$

en fonction de la densité spectrale  $s(f)$ .

Appliquez au cas du secteur :

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

où  $\theta$  est une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$ .

2. Un deuxième estimateur de la fonction d'autocorrélation  $R(\tau)$  est défini par :

$$\hat{R}_2(\tau) = R(\tau) \Lambda_T(\tau)$$

où  $\Lambda_T(\tau)$  est la fenêtre triangulaire de demi-base  $T$ .

Calculez l'estimateur de la densité spectrale de puissance  $\hat{s}_2(f) = \text{TF} \left[ \hat{R}_2(\tau) \right]$ .

Qu'obtient-on pour le secteur défini ci-dessus ?

■

*Correction.*

1.

$$\hat{s}_1(f) = s(f) * 2T \text{sinc}(2\pi fT)$$

Dans le cas du secteur :

$$s(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Et donc :

$$\hat{s}_1(f) = \frac{2TA^2}{4} [\text{sinc}(2\pi(f - f_0)t) + \text{sinc}(2\pi(f + f_0)t)]$$

2.

$$\hat{s}_2(f) = s(f) * T \text{sinc}^2(\pi fT)$$



Dans le cas du secteur :

$$s_2(f) = \frac{A^2 T}{4} [\text{sinc}^2(2\pi(f - f_0)t) + \text{sinc}^2(2\pi(f + f_0)t)]$$

■

### Exercice 3.10 — Deux trajets.

On considère un bruit blanc  $X(t)$  (de moyenne nulle), de fonction d'autocorrélation  $R_X(\tau)$  et de densité spectrale  $s_X(f)$ . On construit le signal

$$Y(t) = AX(t) + BX(t - \theta)$$

où  $A, B$  et  $\theta$  sont des constantes positives. Montrer que le signal  $Y(t)$  est stationnaire et déterminer sa fonction d'autocorrélation et sa densité spectrale de puissance. ■

*Correction.*

La moyenne de  $Y(t)$  est

$$E[Y(t)] = AE[X(t)] + BE[X(t - \theta)] = 0$$

Sa fonction d'autocorrélation est

$$\begin{aligned} E[Y(t)Y(t - \tau)] &= E\{[AX(t) + BX(t - \theta)][AX(t - \tau) + BX(t - \tau - \theta)]\} \\ &= A^2 R_X(\tau) + ABR_X(\tau + \theta) + BAR_X(\tau - \theta) + B^2 R_X(\tau) \\ &= (A^2 + B^2) R_X(\tau) + AB[R_X(\tau + \theta) + R_X(\tau - \theta)] \end{aligned}$$

Sa densité spectrale de puissance est

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= (A^2 + B^2) s_X(f) + ABs_X(f) [\exp(j2\pi f\theta) + \exp(-j2\pi f\theta)] \\ &= (A^2 + B^2) s_X(f) + 2ABs_X(f) \cos(2\pi f\theta) \end{aligned}$$

■

### Exercice 3.11 — Signal sinusoïdal fenêtré.

On considère un signal  $x(t)$  défini par

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \Lambda_T(t)$$

avec  $T > 0$  et  $f_0 > 0$  (deux constantes) et

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} & \text{si } 0 < t < T \\ 1 + \frac{t}{T} & \text{si } -T < t < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Indiquer sans faire de calcul (mais en le justifiant) la classe du signal  $x(t)$  (est-il aléatoire, déterministe à énergie finie, déterministe à puissance finie périodique, déterministe à puissance finie non-périodique ?). En déduire la densité spectrale  $s_x(f)$  de ce signal. En supposant que la fréquence  $f_0$  est suffisamment grande pour faire l'approximation  $\text{sinc}[\pi T(f - f_0)] \text{sinc}[\pi T(f + f_0)] \simeq 0$ ,

en déduire une expression approchée de l'énergie du signal  $x(t)$ . On rappelle la relation suivante

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^4} du = \frac{\pi}{3}.$$

*Correction.*

$x(t)$  est un signal à énergie finie car il est défini sur un intervalle de temps de durée finie. La densité spectrale d'énergie d'un signal à énergie finie est  $s_x(f) = |X(f)|^2$ , où  $X(f)$  est la transformée de Fourier du signal  $x(t)$ . On a

$$X(f) = T \operatorname{sinc}^2(\pi f T) * \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{T}{2} [\operatorname{sinc}^2(\pi(f - f_0)T) + \operatorname{sinc}^2(\pi(f + f_0)T)]$$

et donc

$$s_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{T^2}{4} [\operatorname{sinc}^2(\pi(f - f_0)T) + \operatorname{sinc}^2(\pi(f + f_0)T)]^2.$$

En utilisant l'approximation, on obtient

$$s_x(f) \simeq \frac{T^2}{4} [\operatorname{sinc}^4(\pi(f - f_0)T) + \operatorname{sinc}^4(\pi(f + f_0)T)].$$

L'énergie du signal  $x(t)$  s'écrit alors

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(f) df \simeq \frac{T^2}{4} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^4(\pi(f - f_0)T) df \right] \times 2.$$

Après avoir effectué le changement de variables  $u = \pi T(f - f_0)$ , on obtient

$$E \simeq \frac{T^2}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^4(u) \frac{du}{\pi T} \right] = \frac{T}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \operatorname{sinc}^4(u) du \right] = \frac{T}{3}.$$

## 3.2 Exercices plus difficiles

### Exercice 3.12

Soit  $A(t)$  un processus aléatoire stationnaire réel tel que :

$$E[A(t)] = m$$

$$E[A(t)A(t - \tau)] = e^{-|\tau|}$$

On construit :

$$B(t) = A(\bar{t})$$

où  $t = \bar{t} + \underline{t}$ ,  $\bar{t}$  et  $\underline{t}$  indiquent respectivement les parties entière et fractionnaire de  $t$ .

Le processus  $B(t)$  est-il stationnaire ?

*Correction.*

Le processus aléatoire  $B(t)$  est stationnaire si sa moyenne  $E[B(t)]$  et sa fonction d'autocorrélation  $E[B(t)B^*(t - \tau)]$  sont indépendantes du temps :

— **Moyenne** : Pour  $t$  fixé, il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \leq t < n + 1$ . On a alors

$$E[B(t)] = E[A(\bar{t})] = E[A(n)] = m$$

La moyenne  $E[B(t)]$  est donc indépendante de  $t$ .

— **Fonction d'autocorrélation**. On a

$$\begin{aligned} E[B(t)B^*(t - \tau)] &= E[A(\bar{t})A(\overline{t - \tau})] \\ &= R_A(\bar{t} - \overline{t - \tau}) \end{aligned}$$

où  $R_A(\tau)$  est la fonction d'autocorrélation de  $A(t)$ . La quantité  $R_A(\bar{t} - \overline{t - \tau})$  dépend de  $t$ . Pour s'en convaincre, on peut considérer les deux exemples suivants qui correspondent à la même valeur de  $\tau$  :

$$— t = \frac{1}{4}, \tau = -\frac{1}{2}$$

$$R_A(\bar{t} - \overline{t - \tau}) = R_A(0 - 0) = R_A(0) = 1.$$

$$— t = \frac{3}{4}, \tau = -\frac{1}{2}$$

$$R_A(\bar{t} - \overline{t - \tau}) = R_A(0 - 1) = R_A(-1) = \frac{1}{e}.$$

Le processus aléatoire  $B(t)$  n'est donc pas stationnaire. ■

**Exercice 3.13** Soit le signal  $x(t)$  défini par :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \exp(-\alpha t) \cos(2\pi f_0 t) \text{ pour } t \geq 0 \text{ avec } \alpha > 0 \\ &= 0 \text{ pour } t < 0 \end{aligned}$$

1. A quelle classe de signaux appartient  $x(t)$  ? Justifiez votre réponse.
2. Calculez la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$ .
3. Calculez son spectre (choisissez la méthode qui vous semble la plus simple).
4. On considère maintenant le processus  $Y(t)$  défini par :

$$\begin{aligned} Y(t) &= A \exp(-\alpha t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) \text{ pour } t \geq 0 \\ &= 0 \text{ pour } t < 0 \end{aligned}$$

où  $\theta$  est une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$ .

Calculez la moyenne et la fonction d'autocorrélation de  $Y(t)$ . Le processus  $Y(t)$  est-il stationnaire ?

5. Soit le processus  $Z(t)$  défini comme  $Y(t)$  mais pour lequel l'amortissement  $\alpha$  est une variable aléatoire suivant une loi de Laplace de paramètre  $\lambda$  :

$$g(\alpha) = \lambda \exp(-\lambda \alpha) \text{ pour } \alpha \geq 0$$

On suppose que  $\alpha$  et  $\theta$  sont deux variables aléatoires indépendantes.

Le processus  $Z(t)$  est-il stationnaire ?

6. Quelle est la condition sur la densité de probabilité de  $\alpha$  pour rendre le processus  $Z(t)$  soit stationnaire ? Conclusion. ■

**R** On donne l'indication suivante :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-2\alpha t) \cos(4\pi f_0 t + \theta) dt = \frac{\alpha \cos \theta - 2\pi f_0 \sin \theta}{2(\alpha^2 + 4\pi^2 f_0^2)}$$

*Correction.*

this is the correction ■

**Exercice 3.14 — Détection de Discontinuités par Intercorrélation.**

On considère les deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  définis par :

$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{si } t \notin [0, 6] \\ x(t) = 1 & \text{si } t \in [0, 4] \\ x(t) = -1 & \text{si } t \in ]4, 6] \end{cases} \quad \text{et} \quad y(t) = \prod \left( t - \frac{1}{2} \right) \sin(2\pi t)$$

où  $\prod(t)$  est la fenêtre rectangulaire de largeur 1 de hauteur 1 centrée en  $t = 0$ .

1. Représenter sur un même graphique ces deux signaux.
2. Calculer et représenter la fonction d'intercorrélacion de  $x(t)$  et de  $y(t)$  (on représentera  $y(t - \tau)$  et on examinera les divers cas).
3. Que représentent les pics de cette fonction d'intercorrélacion ? Donner une stratégie de détection de la discontinuité présente en  $t = 4$  pour le signal  $x(t)$ . ■

*Correction.* this is the correction ■

**Exercice 3.15** On considère le signal défini par :

$$x_M(t) = \sum_{k=-M}^M \pi_a(t - kT)$$

avec  $a < T$  où  $\pi_a(t)$  représente la fenêtre rectangulaire de largeur  $a$  et de hauteur unité :

$$\pi_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **Etude de la transformée de Fourier de  $x_M(t)$ .**

- (a) Déterminer  $X_M(f) = TF(x_M(t))$  et  $\lim_{M \rightarrow +\infty} X_M(f)$  (que l'on pourra exprimer en fonction d'un peigne de Diracs).
- (b) Donner le développement en série de Fourier (dans la base des cosinus et sinus) de  $x_\infty(t) = \lim_{M \rightarrow +\infty} x_M(t)$ . On rappelle que le développement en série de Fourier d'une fonction  $g$  périodique de période  $T$  est

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) + b_k \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) \right]$$

avec  $a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(u) \cos(2\pi k \frac{u}{T}) du$ ,  $b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(u) \sin(2\pi k \frac{u}{T}) du$ .

(c) Déterminer  $TF \left( \lim_{M \rightarrow +\infty} x_M(t) \right)$  et comparer avec  $\lim_{M \rightarrow +\infty} X_M(f)$ .

2. **Etude de la densité spectrale de  $x_\infty(t)$**

(a) Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de  $y(t) = \pi_a(t)$  (notées respectivement  $R_y(\tau)$  et  $s_y(f)$ ). Vérifier que  $R_y(\tau)$  a les bonnes propriétés que l'on précisera.

(b) Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée  $R_\infty(\tau)$ ) de  $x_\infty(t)$  en fonction de celle de  $y(t)$  puis la densité spectrale de  $x_\infty(t)$  (notée  $S_\infty(f)$ ) en fonction de celle de  $y(t)$ .

(c) Montrer que  $x_\infty(t)$  est le filtrage de  $\pi_a(t)$  par un filtre linéaire dont on précisera la réponse impulsionnelle  $g(t)$  et la fonction de transfert  $G(f)$ .

(d) A l'aide de l'expression de  $G(f)$  déterminée ci-dessus, vérifier que :

$$s_\infty(f) = s_y(f) |G(f)|^2$$

(e) Soit  $R_{x_\infty y}(\tau)$  la fonction d'intercorrélation entre  $x_\infty(t)$  et  $y(t)$ . Quelle relation existe-t-il entre  $s_{x_\infty y}(f) = TF [R_{x_\infty y}(\tau)]$ ,  $s_y(f)$  et  $G(f)$  ?

*Correction.*

this is the correction

**Exercice 3.16 — Le secteur.**

On désire modéliser le courant électrique disponible à l'ENSEEIH.

1. Dans une première approche, on utilise le modèle :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$\theta$  étant une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ ,  $f_0 = 50\text{Hz}$  et  $A_0 = 220\sqrt{2}\text{V}$ . Déterminer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de  $X(t)$ .

2. La fréquence du courant électrique n'est jamais exactement  $f_0 = 50\text{Hz}$ . Afin de modéliser les variations en fréquence, on considère le modèle :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f t + \theta)$$

$f$  étant une variable uniformément répartie sur l'intervalle  $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$  indépendante de  $\theta$ . Calculer alors la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de  $X(t)$ .

*Correction.*

On considère dans cet exercice différents modèles du secteur et on étudie la densité spectrale de puissance des signaux obtenus à l'aide de ces modèles.

1. Dans une première approche, on utilise le modèle :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

où  $f_0 = 50\text{Hz}$  et  $A_0 = 220\sqrt{2}\text{V}$ . Le signal est déterministe à puissance moyenne finie périodique : en notant  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ , on a

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |X(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{A_0^2}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} \{1 + \cos(4\pi f_0 t)\} dt = \frac{A_0^2}{2} < \infty$$

Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par :

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} X(t)X^*(t-\tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A_0^2 \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0(t-\tau)) dt \\ &= \frac{A_0^2}{T_0} \int_{T_0} \frac{1}{2} \{\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau)\} dt = \frac{A_0^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

Sa DSP est donnée par :

$$s_X(f) = TF[R_X(\tau)] = \frac{A_0^2}{4} \{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\}$$

2. On considère ensuite le modèle suivant :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$\theta$  étant une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$ ,  $f_0 = 50\text{Hz}$  et  $A_0 = 220\sqrt{2}\text{V}$ .

Le signal est aléatoire.

Sa moyenne est donc donnée par :

$$m_X = E[X(t)] = E[A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta)] = A_0 \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta) \times \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par :

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t)X^*(t-\tau)] = E[A_0^2 \cos(2\pi f_0 t + \theta) \cos(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)] \\ &= \frac{A_0^2}{2} E[\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\theta)] = \frac{A_0^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

Remarque : Le signal est stationnaire au second ordre car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps.

Sa DSP est donnée par :

$$s_X(f) = TF[R_X(\tau)] = \frac{A_0^2}{4} \{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\}$$

3. La fréquence du courant électrique n'est jamais exactement  $f_0 = 50\text{Hz}$ . Afin de modéliser les variations en fréquence, on considère le modèle :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f t + \theta)$$

$f$  étant une variable uniformément répartie sur l'intervalle  $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$  indépendante de  $\theta$ .

Sa moyenne est donc donnée par :

$$m_X = E[X(t)] = E_{f,\theta} [A_0 \cos(2\pi f t + \theta)] = E_f [E_\theta [A_0 \cos(2\pi f t + \theta) | f]] = E_f [0] = 0$$

Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par :

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t)X^*(t-\tau)] \\ &= E_f [E_\theta [A_0^2 \cos(2\pi f t + \theta) \cos(2\pi f(t-\tau) + \theta) | f]] \\ &= E_f \left[ \frac{A_0^2}{2} \cos(2\pi f \tau) \right] = \frac{A_0^2}{2} \int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \cos(2\pi f \tau) \times \frac{1}{2\Delta f} df \\ &= \frac{A_0^2}{4\Delta f} \left[ \frac{\sin(2\pi f \tau)}{2\pi \tau} \right]_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \\ &= \frac{A_0^2}{8\pi \tau \Delta f} \{ \sin(2\pi(f_0 + \Delta f)\tau) - \sin(2\pi(f_0 - \Delta f)\tau) \} \\ &= \frac{A_0^2}{4\pi \tau \Delta f} \sin(2\pi \Delta f \tau) \cos(2\pi f_0 \tau) \\ &= \frac{A_0^2}{2} \text{sinc}(2\pi \Delta f \tau) \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

Remarque : Le signal est stationnaire au second ordre car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps.

Sa DSP est donnée par :

$$\begin{aligned} s_X(f) &= TF[R_X(\tau)] \\ &= \frac{A_0^2}{2} \frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f) * \frac{1}{2} \{ \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \} \\ &= \frac{A_0^2}{8\Delta f} \{ \Pi_{2\Delta f}(f - f_0) + \Pi_{2\Delta f}(f + f_0) \} \end{aligned}$$

■

### Exercice 3.17 — Modulation d'amplitude.

Soit  $A(t)$  un signal aléatoire stationnaire, réel, de fonction d'autocorrélation  $R_A(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_A(f)$  définie par :

$$s_A(f) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } |f| \leq F \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère le signal  $X(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ , avec  $F \ll f_0$  et  $\theta$  une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$  indépendante de  $A(t)$ .

1. Montrer que  $X(t)$  est un signal aléatoire stationnaire. Déterminer et représenter graphique-

ment sa densité spectrale de puissance.

2. Afin de retrouver le signal  $A(t)$  à partir de  $X(t)$ , on construit le signal

$$Y(t) = X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

- (a) Déterminer et tracer la densité spectrale de puissance de  $Y(t)$ .  
 (b) Quel traitement doit-on utiliser pour retrouver  $A(t)$  à partir de  $Y(t)$  ?

*Correction.*

1. Le signal est aléatoire. Sa moyenne est donc donnée par :  $m_X = E[X(t)]$  et sa fonction d'autocorrélation par  $R_X(\tau) = E[X(t)X^*(t-\tau)]$ .

Pour montrer qu'il est stationnaire il faut montrer que  $m_X$  et  $R_X$  sont indépendantes du temps.

$$m_X = E[X(t)] = E[A(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)] = E[A(t)] E[\cos(2\pi f_0 t + \theta)]$$

car  $A$  et  $\theta$  sont indépendantes. D'où  $m_X = 0$ .

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t)X^*(t-\tau)] \\ &= E[A(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) A^*(t-\tau) \cos(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)] \\ &= E[A(t)A^*(t-\tau)] E[\cos(2\pi f_0 t + \theta) \cos(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)] = R_A(\tau) \times \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

Le signal est bien stationnaire (au second ordre) car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps.

Sa DSP est donnée par

$$\begin{aligned} s_X(f) &= TF[R_X(\tau)] \\ &= s_A(f) * \frac{1}{4} \{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\} \\ &= \frac{1}{4} \{s_A(f-f_0) + s_A(f+f_0)\} \end{aligned}$$

2. Afin de retrouver le signal  $A(t)$  à partir de  $X(t)$ , on construit le signal  $Y(t) = X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ .  
 (a)

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y^*(t-\tau)] \\ &= E[X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) X^*(t-\tau) \cos(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)] \end{aligned}$$

Attention ici  $X(t)$  et le cosinus ne sont pas indépendants, tous deux dépendent de  $\theta$ .

D'où

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[A(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) A^*(t-\tau) \cos^2(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)] \\ &= R_A(\tau) \times E \left[ \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)}{2} \frac{1 + \cos(4\pi f_0(t-\tau) + 2\theta)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4} R_A(\tau) E \left[ 1 + \cos(2\theta + \dots) + \cos(2\theta + \dots) + \frac{1}{2} \{\cos(4\pi f_0 \tau) + \cos(4\theta + \dots)\} \right] \\ &= \frac{1}{4} R_A(\tau) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 \tau) \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
s_Y(f)(\tau) &= TF [R_Y(\tau)] \\
&= \frac{1}{4} s_A(f) * \left\{ \delta(f) + \frac{1}{4} \{ \delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0) \} \right\} \\
&= \frac{1}{4} s_A(f) + \frac{1}{16} \{ s_A(f - 2f_0) + s_A(f + 2f_0) \}
\end{aligned}$$

- (b) Pour retrouver  $A(t)$  à partir de  $Y(t)$  Il faudra utiliser un filtre passe-bas pour conserver uniquement la partie  $\frac{1}{4} s_A(f)$  et couper la partie qui se trouve autour de  $2f_0$  ■

### Exercice 3.18 — Modulation d'amplitude du signal des télégraphistes.

Soit  $A = \{A(t), t \in \mathbb{R}\}$  un signal des télégraphistes à valeurs dans  $\{-1, +1\}$  (cf cours) et  $\phi$  une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[0, 2\pi[$  indépendante du processus  $A$ . On considère :

$$X(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation et le spectre de puissance de  $X(t)$ ,  $X^2(t)$  et  $X^3(t)$ . ■

**R** Rappel :  $K_A(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$ ,  $s_A(f) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 f^2}$  et  $\cos^3 a = \frac{1}{4} \cos 3a + \frac{3}{4} \cos a$ .

Correction.

this is the correction ■

### Exercice 3.19 — Modulation de phase.

Soit  $Z(t)$  un processus aléatoire stationnaire réel de moyenne  $m$ , de fonction d'autocorrélation  $K_Z(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_Z(f)$  définie par :

$$\begin{aligned}
s_Z(f) &= \alpha && \text{si } |f| \leq F \\
s_Z(f) &= 0 && \text{sinon}
\end{aligned}$$

On considère une modulation de phase qui donne naissance au processus  $P_a(t)$  défini par :

$$P_a(t) = \cos(2\pi f_0 t + aZ(t) + \phi)$$

avec  $F \ll f_0$ .  $\phi$  est une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[0, 2\pi[$  indépendante de  $Z(t)$ .

- Déterminer la moyenne et la fonction d'autocorrélation de  $P_a(t)$  en fonction de  $\varphi(a, t, \tau) = E [e^{ia(Z(t) - Z(t - \tau))}]$ .
- On suppose que  $Z(t)$  est un processus gaussien de fonction d'autocorrélation

$$\begin{aligned}
R_Z(\tau) &= 1 - |\tau| && \text{si } |\tau| \leq 1 \\
R_Z(\tau) &= 0 && \text{sinon}
\end{aligned}$$

- (a) on peut démontrer que la variable aléatoire  $V(t, \tau) = Z(t) - Z(t - \tau)$  est alors une variable aléatoire gaussienne pour tout  $\tau \neq 0$  (résultat admis). Déterminer la moyenne et la variance de  $V(t, \tau)$  en fonction de  $K_Z(\tau)$ .

- (b) En déduire  $\varphi(a, t, \tau)$  puis la densité spectrale de puissance de  $P_a(t)$ . On rappelle que si  $X$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ , on a  $E[e^{itX}] = \exp(itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2})$  et que  $TF(e^{-a^2|\tau|}) = \frac{2a^2}{a^4 + 4\pi f^2}$ .
3. On suppose désormais que  $Z(t)$  est une variable aléatoire binaire prenant les valeurs  $+1$  et  $-1$  et que  $a = -\frac{\pi}{2}$ . Montrer que  $P_a(t) = Z(t) \sin(2\pi f_0 t + \phi)$ . En déduire la densité spectrale de puissance de  $P_a(t)$ .

*Correction.*

this is the correction

### Exercice 3.20 — Somme de composantes harmoniques.

Soient  $A_1, \dots, A_n$  des variables aléatoires de moyenne nulle de  $L^2_{\mathbb{C}}$  deux à deux orthogonales (i.e.  $E[A_j A_k^*] = 0$  pour  $k \neq j$ ) et soient  $f_1, \dots, f_n$  des réels distincts deux à deux. Vérifier que le processus

$$X(t) = \sum_{j=1}^n A_j e^{i2\pi f_j t}$$

est un processus stationnaire et donner sa fonction d'autocorrélation et sa densité spectrale de puissance.

*Correction.* this is the correction

### Exercice 3.21 — Conditions suffisantes de stationnarité.

$B$  est une variable aléatoire de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2 \neq 0$ . Soit  $\phi$  une variable aléatoire indépendante de  $B$  de densité de probabilité  $f(\varphi)$  nulle à l'extérieur de  $]0, 2\pi[$ . On note

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi$$

le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de la décomposition en série de Fourier de  $f(\varphi)$ . A quelles conditions suffisantes portant sur les  $c_n$ , le signal  $X(t) = B \cos(2\pi f_0 t + \phi)$  est-il stationnaire ?

*Correction.* this is the correction

### Exercice 3.22 — Signal PAM.

On considère la fonction  $f(t)$  définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, h] \\ 0 & \text{si } t \in ]h, 1] \end{cases}$$

où  $h \in ]0, 1/2[$ . Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$\begin{aligned} P[A_n = 1] &= p \\ P[A_n = -1] &= q \end{aligned}$$

avec  $p + q = 1$ . On considère deux modèles :

$$\text{Modèle 1 : } X(t) = A_{\bar{t}} f(\underline{t})$$

$$\text{Modèle 2 : } Y(t) = X(t + \phi)$$

où  $\phi$  est une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[0, 1[$  indépendante des variables aléatoires  $A_n$ .

1. Représenter une réalisation du processus  $X(t)$ . En considérant  $t \in ]0, 1[$ , montrer que  $E[X(t)]$  dépend de  $t$ .
2. **Calcul de la moyenne de  $Y(t)$** 
  - (a) Ecrire  $E[Y(t)]$  en faisant apparaître une espérance conditionnelle sur la variable aléatoire *instant de départ*  $\phi$ .
  - (b) En utilisant la périodicité de la fonction  $u \rightarrow f(\underline{u})$ , montrer que  $E[Y(t)] = (2p - 1)h$ .
3. **Calcul de la fonction d'autocorrélation de  $Y(t)$** 
  - (a) En utilisant le même raisonnement que dans le cas précédent, montrer que pour  $\tau > 0$

$$E[Y(t)Y(t + \tau)] = \int_0^1 f(u)f(u + \tau) E[A_0 A_{\bar{u} + \tau}] du$$

- (b) **1er cas :  $\tau \in [0, 1]$**

Montrer que :

$$E[Y(t)Y(t + \tau)] = I_1(\tau) + (2p - 1)^2 I_2(\tau)$$

$$\text{avec } I_1(\tau) = \int_0^{1-\tau} f(u)f(u + \tau) du \text{ et } I_2(\tau) = \int_{1-\tau}^1 f(u)f(u + \tau - 1) du.$$

Montrer que :

$$I_1(\tau) = \begin{cases} h - \tau & \text{si } \tau \in [0, h] \\ 0 & \text{si } \tau \in ]h, 1] \end{cases} \text{ et } I_2(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \in [0, 1 - h] \\ h - (1 - \tau) & \text{si } \tau \in ]1 - h, 1] \end{cases}$$

- (c) **2ème cas :  $\tau \geq 1$**

Montrer en utilisant les résultats de b) :

$$E[Y(t)Y(t + \tau)] = \begin{cases} (2p - 1)^2 (h - \tau) & \text{si } \tau \geq 1 \text{ et } \tau \in [0, h] \\ (2p - 1)^2 (h - (1 - \tau)) & \text{si } \tau \geq 1 \text{ et } \tau \in ]1 - h, 1] \end{cases}$$

Déterminer la densité spectrale de puissance de  $Y(t)$ .

**R** On donne :

$$\int_{-h}^h (h - u) \cos(2k\pi u) du = \frac{\sin^2(\pi h k)}{k^2 \pi^2} \text{ pour } k \neq 0$$

*Correction.* this is the correction

**Exercice 3.23 — Signal Biphase.**

On considère la fonction  $f(t)$  définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2[ \\ -1 & \text{si } t \in [1/2, 1[ \end{cases}$$

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$P[A_n = 1] = p$$

$$P[A_n = -1] = q$$

avec  $p + q = 1$ . On considère deux modèles :

$$\text{Modèle 1 : } X(t) = A_{\bar{t}} f(\underline{t})$$

$$\text{Modèle 2 : } Y(t) = X(t + \phi)$$

où  $\phi$  est une variable aléatoire uniformément répartie sur  $[0, 1[$  indépendante des variables aléatoires  $A_n$ .

1. Représenter une réalisation du processus  $X(t)$ . En considérant  $t \in [0, 1/2[$  et  $t \in [1/2, 1[$ , montrer que  $E[X(t)]$  dépend de  $t$ .
2. **Calcul de la moyenne de  $Y(t)$** 
  - (a) Ecrire  $E[Y(t)]$  en faisant apparaître une espérance conditionnelle sur la variable aléatoire *instant de départ*  $\phi$ .
  - (b) En utilisant la périodicité de la fonction  $u \rightarrow f(u)$ , montrer que  $E[Y(t)] = 0$ .
3. **Calcul de la fonction d'autocorrélation de  $Y(t)$** 
  - (a) En utilisant le même raisonnement que dans le cas précédent, montrer que pour  $\tau > 0$

$$E[Y(t)Y(t + \tau)] = \int_0^1 f(u)f(u + \tau) E[A_0 A_{u+\tau}] du$$

- (b) **1er cas :  $\tau \in [0, 1[$**   
Montrer que :

$$E[Y(t)Y(t + \tau)] = I_1(\tau) + (2p - 1)^2 I_2(\tau)$$

$$\text{avec } I_1(\tau) = \int_0^{1-\tau} f(u)f(u + \tau) du \text{ et } I_2(\tau) = \int_{1-\tau}^1 f(u)f(u + \tau - 1) du.$$

Montrer que :

$$I_1(\tau) = \begin{cases} 1 - 3\tau & \text{si } \tau \in [0, 1/2] \\ \tau - 1 & \text{si } \tau \in ]1/2, 1] \end{cases} \text{ et } I_2(\tau) = \begin{cases} -\tau & \text{si } \tau \in [0, 1/2] \\ 3\tau - 2 & \text{si } \tau \in ]1/2, 1] \end{cases}$$

- (c) **2ème cas :  $\tau \geq 1$**

On montrerait de la même façon qu'au b) :

$$E[Y(t)Y(t + \tau)] = \begin{cases} (2p - 1)^2 (1 - 4\underline{\tau}) & \text{si } \tau \geq 1 \text{ et } \underline{\tau} \in [0, 1/2] \\ (2p - 1)^2 (4\underline{\tau} - 3) & \text{si } \tau \geq 1 \text{ et } \underline{\tau} \in ]1/2, 1] \end{cases}$$

4. Déterminer la densité spectrale de puissance de  $Y(t)$ .

**R** On donne :

$$\int_0^{1/2} (3u-1) \cos(2\pi fu) du + \int_{1/2}^1 (1-u) \cos(2\pi fu) du = \frac{-\sin^4\left(\frac{\pi f}{2}\right)}{\left(\frac{\pi f}{2}\right)^2}$$

$$\int_0^{1/2} (1-4u) \cos(2k\pi u) du = \frac{1 - \cos(k\pi)}{k^2 \pi^2}$$

*Correction.* this is the correction

### Exercice 3.24 — Fenêtre Spectrale B-Spline.

Soit le signal :

$$x(t) = w(t) \cdot A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

où  $w(t)$  est de support borné  $\pm T/2$ . On va se préoccuper du rôle de  $w(t)$  sur les caractéristiques spectrales de la fonction  $A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ . Pour  $w(t)$ , on fait le choix de la famille suivante :

$$w(t) = C(M) \cdot \underset{M}{*} \Pi_{\alpha}(t)$$

où  $*$  représente  $M$  convolutions, et  $\alpha$  est choisi de telle sorte que  $w(t)$  ait bien le support  $\pm T/2$ . Cette famille de fonctions est connue sous le nom de B-Spline. La constante  $C(M)$  sera fixée par la suite. Donner la valeur de  $\alpha$  en fonction de  $M$ .

1. Avec  $M$  fixé, donner l'expression de la TF et de la Densité Spectrale d'Energie (DSE)  $S_X(f)$  de  $x(t)$ . Choisir la constante  $C(M)$  pour que  $S_X(f_0) = A^2/4$ .
2. Le support  $T$  de  $w(t)$  est choisi égal à un nombre entier de périodes de  $\cos(2\pi f_0 t)$ , soit  $T = k/f_0$ ,  $k$  entier. Analyser les rôles respectifs de  $M$  et  $k$ , i.e. à  $M$  fixé, observer comment évolue  $S_X(f)$ , et faire de même, à  $k$  fixé, en fonction de  $M$ .

Quelles conclusions en tirez-vous pour approximer au mieux la DSE d'une sinusoïde, quand on n'en connaît qu'une longueur finie ?

*Correction.* this is the correction

### Exercice 3.25 — Fonction d'ambiguïté.

On considère un signal déterministe à énergie finie noté  $s(t)$  représentant un signal émis par un radar. Ce signal intercepte une cible de vitesse  $v_0$  située à la distance  $R_0$  de la source et est réfléchi en direction du radar. Le signal reçu par le radar s'écrit

$$x(t) = y(t - t_a) + n(t)$$

avec

$$y(t) = s(t) \exp[j2\pi(f_0 + f_a)t]$$

où  $t_a = 2R_0/c$  ( $c$  est la vitesse de l'onde radar),  $v_0 = \pi\lambda f_a$  ( $\lambda$  est la longueur d'onde du signal

radar),  $f_0$  est la fréquence porteuse et  $n(t)$  est un bruit blanc (de moyenne nulle) et de variance  $\sigma^2$ . L'objectif de ce problème est d'étudier une méthode permettant d'estimer  $R_0$  et  $\nu_0$  à partir du signal reçu  $x(t)$ .

1. A quelle classe de signaux appartient le signal  $y(t)$ ? Déterminer la fonction d'autocorrélation de ce signal en fonction de  $f_0, f_a$  et  $R_s(\tau)$ , puis sa densité spectrale en fonction de  $f_0, f_a$  et  $S_s(f)$ .
2. On corrèle le signal reçu  $x(t)$  avec une version décalée en temps et en fréquence du signal  $s(t)$  en formant

$$R(t_h, f_h) = \int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t - t_h) \exp[-j2\pi(f_0 + f_h)(t - t_h)] dt$$

On appelle fonction d'ambiguïté la transformée

$$\Lambda(\tau, \nu) = |E[R(t_h, f_h)]|$$

Montrer que FA s'écrit

$$\Lambda(\tau, \nu) = \left| \int_{\mathbb{R}} s(u) s^*(u - \tau) \exp(-j2\pi\nu u) du \right|$$

avec  $\tau = t_h - t_a$  et  $f = f_h - f_a$ . Puisque la fonction d'ambiguïté ne dépend que de  $\tau$  et de  $f$ , on la notera dans la suite FA =  $\Lambda(\tau, f)$ .

3. Déterminer  $\Lambda(\tau, \nu)$  lorsque  $s(t)$  est un pulse défini par

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et tracer  $\Lambda(0, \nu)$  et  $\Lambda(\tau, 0)$ . Montrer que  $\Lambda(\tau, \nu)$  admet son maximum en  $\tau = 0$  et  $\nu = 0$  et en déduire une méthode permettant d'estimer  $R_0$  et  $\nu_0$  à partir de la fonction d'ambiguïté. ■

*Correction.*

1. Puisque  $s(t)$  est un signal à énergie finie, on a

$$E = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < \infty.$$

Mais

$$\int_{\mathbb{R}} |y(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = E$$

Le signal  $y(t)$  est donc aussi à énergie finie. La fonction d'autocorrélation du signal  $y(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} y(t) y^*(t - \tau) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(t) \exp[j2\pi(f_0 + f_a)t] s^*(t - \tau) \exp[-j2\pi(f_0 + f_a)(t - \tau)] dt \\ &= \exp[j2\pi(f_0 + f_a)\tau] \int_{\mathbb{R}} s(t) s^*(t - \tau) dt \\ &= \exp[j2\pi(f_0 + f_a)\tau] R_s(\tau) \end{aligned}$$

La densité spectrale d'énergie de  $y(t)$  est donc

$$\begin{aligned} s_y(f) &= \text{TF}[R_y(\tau)] \\ &= \delta(f - (f_0 + f_a)) * s_s(f) \\ &= s_s(f - (f_0 + f_a)) \end{aligned}$$

2. Comme la réplique  $y(t - t_h)$  est un signal déterministe, on a

$$\begin{aligned} E[R(t_h, f_h)] &= E \left[ \int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t - t_h) \exp[-j2\pi(f_0 + f_h)(t - t_h)] dt \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} E[x(t)] y^*(t - t_h) \exp[-j2\pi(f_0 + f_h)(t - t_h)] dt. \end{aligned}$$

Comme le bruit  $n(t)$  est blanc, il est de moyenne nulle d'où

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= y(t - t_a) \\ &= s(t - t_a) \exp[j2\pi(f_0 + f_a)(t - t_a)]. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E[R(t_h, f_h)] &= \int_{\mathbb{R}} s(t - t_a) \exp[j2\pi(f_0 + f_a)(t - t_a)] s^*(t - t_h) \exp[-j2\pi(f_0 + f_h)(t - t_h)] dt \\ &= \left[ \int_{\mathbb{R}} s(t - t_a) s^*(t - t_h) \exp[-j2\pi(f_h - f_a)t] dt \right] \exp[j2\pi(f_0 + f_h)t_h - j2\pi(f_0 + f_a)t_a] \end{aligned}$$

$$\Lambda(\tau, \nu) = |E[R(t_h, f_h)]|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} s(t - t_a) s^*(t - t_h) \exp[-j2\pi(f_h - f_a)t] dt \right|$$

et

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{\mathbb{R}} s(u) s^*(u + t_a - t_h) \exp[-j2\pi(f_h - f_a)u] du \right| \exp[-j2\pi(f_h - f_a)t_a] \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} s(u) s^*(u - \tau) \exp[-j2\pi\nu u] du \right| \end{aligned}$$

puisque  $\nu = f_h - f_a$

3. Lorsque  $s(t)$  est un pulse défini par

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}} s(u) s^*(u - \tau) \exp[-j2\pi\nu u] du = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s^*(u - \tau) \exp[-j2\pi\nu u] du.$$

Différents cas se présentent selon la valeur de  $\tau$ . Le pulse  $s^*(u - \tau)$  a pour support  $]\tau - \frac{T}{2}, \tau + \frac{T}{2}[$  donc lorsque

$$\Lambda(\tau, \nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \text{ ou } \tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{\tau + T/2} \exp[-j2\pi\nu u] du & \text{si } \tau \in [-T, 0] \\ \frac{1}{T} \int_{\tau - T/2}^{T/2} \exp[-j2\pi\nu u] du & \text{si } \tau \in [0, T] \end{cases}$$

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir le résultat suivant

$$\Lambda(\tau, \nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \notin [-T, T] \\ \frac{T+\tau}{T} \operatorname{sinc}[\pi\nu(T+\tau)] & \text{si } \tau \in [-T, 0] \\ \frac{T-\tau}{T} \operatorname{sinc}[\pi\nu(T-\tau)] & \text{si } \tau \in [0, T] \end{cases}$$

ou sous forme condensée

$$\Lambda(\tau, \nu) = \frac{T-|\tau|}{T} \operatorname{sinc}[\pi\nu(T-|\tau|)] I_{[-T, T]}(\tau)$$

où  $I_{[-T, T]}(\tau)$  est la fonction indicatrice sur l'intervalle  $[-T, T]$ . La courbe représentative de la fonction

$$\tau \mapsto \Lambda(\tau, 0) = \frac{T-|\tau|}{T} I_{[-T, T]}(\tau)$$

est un triangle d'amplitude 1 en  $\tau = 0$  et s'annulant en  $\tau = \pm T$ . La courbe représentative de la fonction

$$\nu \mapsto \Lambda(0, \nu) = \operatorname{sinc}[\pi\nu T]$$

est un sinus cardinal d'amplitude 1 en  $\nu = 0$  et dont les premiers zéros sont en  $\nu = \pm \frac{1}{T}$ . Quelle que soit la valeur de  $\tau$  fixée, la fonction

$$\operatorname{sinc}[\pi\nu(T-|\tau|)]$$

admet son maximum en  $\nu = 0$ . De plus pour  $\nu = 0$ , la fonction est maximale en  $\tau = 0$ . On en déduit que  $\Lambda(\tau, \nu)$  admet son maximum en  $\tau = 0$  et  $\nu = 0$ . Pour estimer  $R_0$  et  $\nu_0$ , il suffit de chercher le maximum de la fonction d'ambiguïté en évaluant  $R(t_h, f_h)$  pour différentes valeurs de  $t_h$  et  $f_h$ . Ce maximum est obtenu pour

$$\begin{aligned} \tau = 0 &\iff t_h = t_a = 2R_0/c \iff R_0 = \frac{t_h c}{2} \\ \nu = 0 &\iff f_h = f_a = \frac{\nu_0}{\pi\lambda} \iff \nu_0 = \pi\lambda f_h \end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer  $R_0$  et  $\nu_0$ . ■

### Exercice 3.26 — Estimation d'un retard.

1. On considère un signal déterministe à énergie finie noté  $x(t)$  représentant un signal sonore émis par une source. Ce signal est enregistré par deux microphones situés dans une pièce acoustique. On ignore dans cet exercice le bruit affectant la transmission. Les signaux reçus par ces deux microphones peuvent être alors définis de la façon suivante

$$x_1(t) = A_1 x(t - T_1) \text{ et } x_2(t) = A_2 x(t - T_2)$$

où les amplitudes et retards  $A_1, A_2, T_1, T_2$  sont des réels positifs. - Déterminer la fonction d'inter-corrélation entre les signaux  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  notée  $R_{x_1 x_2}(\tau)$  en fonction des amplitudes  $A_1$  et  $A_2$ , de la différence des temps d'arrivée  $T = T_1 - T_2$  et de la fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  du signal source  $x(t)$ . Proposer une méthode permettant d'estimer la différence des temps d'arrivée  $T = T_1 - T_2$  à partir de  $R_{x_1 x_2}(\tau)$ . - En utilisant l'inégalité de Parseval, montrer que

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = TF^{-1} [X_1(f)X_2^*(f)]$$



En déduire  $R_{x_1x_2}(\tau)$  lorsque le signal source s'écrit

$$x(t) = \Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Calculer l'expression suivante

$$G(\tau) = TF^{-1} \left[ \frac{X_1(f)X_2^*(f)}{|X_1(f)||X_2(f)|} \right]$$

et en déduire que  $T$  peut aussi être estimé à l'aide de la fonction  $G(\tau)$ .

2. On suppose désormais que le signal source est un signal périodique (de période  $T_0$ ) de puissance finie. Déterminer  $R_{x_1x_2}(\tau)$  en fonction de  $A_1, A_2, T$  et de l'autocorrélation du signal source  $R_x$ . Peut-on estimer  $T$  à partir de  $R_{x_1x_2}(\tau)$ ? Étudier le cas particulier où  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ .

3. Pour terminer on suppose que le signal source est un signal aléatoire stationnaire de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$ . Déterminer  $R_{x_1x_2}(\tau)$  en fonction de  $A_1, A_2, T$  et de l'autocorrélation du signal source  $R_x(\tau)$ . Que pensez vous de l'utilisation de la fonction  $G(\tau)$  pour estimer la différence des temps d'arrivée  $T$ ? ■

*Correction.*

1. La fonction d'intercorrélacion entre les signaux à énergie finie  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  est définie par

$$\begin{aligned} R_{x_1x_2}(\tau) &= \int x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt \\ &= A_1A_2 \int x(t-T_1)x^*(t-\tau-T_2)dt \\ &= A_1A_2R_x(\tau-T) \end{aligned}$$

Puisque la fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  est maximale à l'origine  $\tau = 0$ , le maximum de  $R_{x_1x_2}(\tau)$  est atteint en  $\tau = T$ . On en déduit

$$T = \arg \max_{\tau} R_{x_1x_2}(\tau)$$

Pour déterminer  $T$ , il suffit de chercher la valeur de  $\tau$  qui maximise la fonction d'intercorrélacion  $R_{x_1x_2}(\tau)$

En utilisant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} R_{x_1x_2}(\tau) &= \int x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt \\ &= \int X_1(f) [e^{-j2\pi f\tau}X_2(f)]^* df \\ &= \int X_1(f)X_2^*(f)e^{j2\pi f\tau} df \\ &= TF^{-1} [X_1(f)X_2^*(f)] \end{aligned}$$

Lorsque  $x(t) = \Pi_a(t)$ , on a

$$\begin{aligned} X_1(f) &= A_1 e^{-j2\pi f T_1} X(f) = aA_1 e^{-j2\pi f T_1} \frac{\sin(\pi a f)}{\pi a f} \\ X_2(f) &= A_2 e^{-j2\pi f T_2} X(f) = aA_2 e^{-j2\pi f T_2} \frac{\sin(\pi a f)}{\pi a f} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 R_{x_1x_2}(\tau) &= TF^{-1} [X_1(f)X_2^*(f)] \\
 &= aA_1A_2TF^{-1} \left\{ e^{-j2\pi fT} a \left[ \frac{\sin(\pi af)}{\pi af} \right]^2 \right\} \\
 &= aA_1A_2\delta(\tau - T) * \Lambda_a(\tau) \\
 &= aA_1A_2\Lambda_a(\tau - T)
 \end{aligned}$$

qui est bien une fonction maximale en  $\tau = T$ .

On a

$$\begin{aligned}
 G(\tau) &= TF^{-1} \left[ \frac{X_1(f)X_2^*(f)}{|X_1(f)||X_2(f)|} \right] \\
 &= TF^{-1} \left[ \frac{A_1e^{-j2\pi fT_1}X(f)A_2e^{j2\pi fT_2}X^*(f)}{A_1|X(f)|A_2|X(f)|} \right] \\
 &= TF^{-1} [e^{-j2\pi fT}] = \delta(\tau - T)
 \end{aligned}$$

On voit donc que même en présence de bruit la fonction  $G$  devrait présenter un pic en  $\tau = T$ .

2. Pour un signal périodique de période  $T_0$ , on a

$$\begin{aligned}
 R_{x_1x_2}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2^*(t - \tau) dt \\
 &= A_1A_2 \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t - T_1)x^*(t - \tau - T_2) dt \\
 &= A_1A_2R_x(\tau - T)
 \end{aligned}$$

La fonction d'intercorrélation est une fonction périodique de période  $T_0$  comme  $R_x(\tau)$  donc en recherchant les maxima de  $R_{x_1x_2}(\tau)$ , on aura une estimation de  $T$  à un multiple de  $T_0$  près. Dans le cas où  $x(t) = \cos(2\pi f_0t)$ , on a vu en cours

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0\tau)$$

d'où

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \frac{A_1A_2}{2} \cos[2\pi f_0(\tau - T)]$$

On voit que dans ce cas que l'intercorrélation possède plusieurs maxima et minima aux points

$$\tau = T + kT_0, k \in \mathbb{Z} \text{ et } \tau = T + k\frac{T_0}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

On pourra donc estimer  $T$  à un multiple de  $T_0$  près.

3. Lorsque le signal source est un signal aléatoire stationnaire, on a

$$\begin{aligned}
 R_{x_1x_2}(\tau) &= E[x_1(t)x_2^*(t - \tau)] \\
 &= A_1A_2E[x(t - T_1)x^*(t - \tau - T_2)] \\
 &= A_1A_2R_x(\tau - T)
 \end{aligned}$$

À nouveau, on peut estimer  $T$  en recherchant le maximum de  $R_{x_1x_2}(\tau)$ . Par contre, on ne peut pas utiliser la fonction  $G(\tau)$  car les transformées de Fourier  $X_1(f)$  et  $X_2(f)$  n'existent pas ( $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont des signaux aléatoires stationnaires). ■

## 4. Filtrage linéaire

**Exercice 4.1** On considère le système défini de la manière suivante :

$$y(t) = T\{x(t)\} = x(t) \cos(2\pi f_0 t).$$

Le système ainsi défini est-il ? :

1. avec ou sans mémoire ?
2. causal ?
3. linéaire ?
4. invariant par décalage dans le temps ?
5. stable ?

*Correction.*

C'est un système sans mémoire, causal, non invariant par décalage temporel et stable. ■

**Exercice 4.2** Soit le système d'entrée  $x(t)$  et de sortie  $y(t)$  défini par :

$$y(t) = x(t)m(t)$$

Le système ainsi défini est-il linéaire ? invariant dans le temps ? ■

*Correction.*

Le système est linéaire (à  $x_1(t) + x_2(t)$  en entrée correspond en sortie  $y(t) = (x_1(t) + x_2(t))m(t) = x_1(t)m(t) + x_2(t)m(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ) mais non invariant dans le temps (à  $x(t - t_0)$  correspond  $x(t - t_0)m(t) \neq y(t - t_0)$ ). ■

**Exercice 4.3** Soit le système d'entrée  $x(t)$  et de sortie  $y(t)$  défini par :

$$y(t) = x^2(t)$$

Le système ainsi défini est-il linéaire ? invariant dans le temps ? ■

*Correction.*

Le système est non linéaire ( $y(t) = (x_1(t) + x_2(t))^2 = x_1^2(t) + x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) \neq x_1^2(t) + x_2^2(t)$ ) qui correspondrait à  $y_1(t) + y_2(t)$  mais invariant dans le temps (à  $x(t - t_0)$  correspond  $x^2(t - t_0) = y(t - t_0)$ ). ■

**Exercice 4.4 — Filtre moyenneur à mémoire finie.**

Le filtre moyenneur à mémoire finie est un système défini par la relation entrée-sortie suivante :

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(u) du,$$

où  $x(t)$  représente l'entrée du filtre et  $y(t)$  la sortie.

1. Montrer que ce filtre moyenneur à mémoire finie est un filtre linéaire et calculer sa réponse impulsionnelle.
2. Ce filtre est-il réalisable ? ■

*Correction.*

1. Il existe plusieurs manières de répondre à cette question.

— Si  $x(t) = e^{j2\pi ft}$  :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t e^{j2\pi fu} du = \text{sinc}(\pi fT) e^{-j\pi fT} e^{j2\pi ft} \\ &= H(f)x(t) \text{ avec } H(f) = \text{sinc}(\pi fT) e^{-j\pi fT} \end{aligned}$$

On a bien un filtre linéaire de réponse en fréquence  $H(f) = \text{sinc}(\pi fT) e^{-j\pi fT}$  et donc de réponse impulsionnelle  $h(t) = \frac{1}{T} \Pi_T(t - \frac{T}{2})$ , si  $\Pi_T(t)$  représente une fonction porte de largeur  $T$ , de hauteur 1 et centrée en  $t = 0$ .

—

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(u) du = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} x(u) \Pi_T\left(u - \left(t - \frac{T}{2}\right)\right) du \\ &= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} x(u) \Pi_T\left(\left(t - \frac{T}{2}\right) - u\right) du \\ &= x(t) * h(t), \\ &\text{avec } h(t) = \frac{1}{T} \Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

— si  $x(t) = \delta(t)$  alors

$$y(t) = h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \delta(u) du = \frac{1}{T} & \text{si } 0 < t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où

$$h(t) = \frac{1}{T} \Pi_T \left( t - \frac{T}{2} \right)$$

Il faut alors montrer que nous avons bien un filtre, c'est-à-dire que l'on a bien  $y(t) = x(t) * h(t)$  :

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \frac{1}{T} \Pi_T \left( t - \frac{T}{2} \right) * x(t) \\ &= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} x(u) \Pi_T \left( t - \frac{T}{2} - u \right) du \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(u) du : OK \end{aligned}$$

— on peut également dériver :

$$y'(t) = \frac{1}{T} \{x(t) - x(t-T)\}$$

d'où par transformée de Fourier :

$$j2\pi f Y(f) = \frac{1}{T} \{X(f) - e^{-j2\pi f T} X(f)\}$$

et donc

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1 - e^{-j2\pi f T}}{j2\pi f T} = e^{-j\pi f T} \text{sinc}(\pi f T)$$

Ce qui donne par transformée de Fourier inverse :

$$h(t) = \frac{1}{T} \Pi_T \left( t - \frac{T}{2} \right)$$

2. Un filtre est réalisable si :

- sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  est réelle : OK ici
- il est causal : OK ici car pour  $t < 0$  on a  $h(t) = 0$
- il est stable, c'est-à-dire qu'il vérifie la condition de stabilité  $\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < \infty$  : OK ici :  $\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt = \frac{1}{T} \times T = 1$ .

Ce filtre est donc réalisable. ■

#### Exercice 4.5 — Filtre intégrateur.

Soit  $x(t)$  un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $S_x(f)$ .

Soit :

$$y(t) = \int_t^{a+t} x(u) du, \text{ avec } a > 0$$

1. Montrer que  $y(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire dont l'entrée est  $x(t)$  et déterminer sa réponse impulsionnelle.
2. Ce filtre est-il réalisable ?
3. Calculer la moyenne de  $y(t)$ .

4. Donner la densité spectrale de puissance de  $y(t)$ ,  $S_y(f)$ , en fonction de  $S_x(f)$ .

*Correction.*

1. Il existe plusieurs manières de répondre à cette question

— Si  $x(t) = e^{j2\pi ft}$  :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_t^{a+t} e^{j2\pi fu} du \\ &= \frac{1}{j2\pi f} (e^{j2\pi fa} - 1) e^{j2\pi ft} \\ &= H_a(f)x(t) \end{aligned}$$

On a bien une opération de filtrage linéaire entre le signal  $x(t)$  et le signal  $y(t)$  avec un filtre de réponse en fréquence

$$H_a(f) = \frac{1}{j2\pi f} (e^{j2\pi fa} - 1)$$

—

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_t^{a+t} x(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(u) \Pi_a \left( u - \left( t + \frac{a}{2} \right) \right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(u) \Pi_a \left( \left( t + \frac{a}{2} \right) - u \right) du \\ &= x(t) * h(t), \\ \text{avec } h(t) &= \Pi_a \left( t + \frac{a}{2} \right) \end{aligned}$$

— si  $x(t) = \delta(t)$

$$y(t) = h(t) = \begin{cases} \int_t^{a+t} \delta(u) du = 1 & \text{si } -a < t < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où

$$h(t) = \Pi_a \left( t + \frac{a}{2} \right)$$

Il faut alors montrer que nous avons bien un filtre, c'est-à-dire que l'on a bien  $y(t) = x(t) * h(t)$  :

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \Pi_a \left( t + \frac{a}{2} \right) * x(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(u) \Pi_a \left( t + \frac{a}{2} - u \right) du \\ &= \int_t^{t+a} x(u) du : OK \end{aligned}$$

— on peut également dériver :

$$y'(t) = \{x(t+a) - x(t)\}$$

d'où par transformée de Fourier

$$j2\pi fY(f) = \{e^{j2\pi fa}X(f) - X(f)\}$$

et donc

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{e^{j2\pi fa} - 1}{j2\pi f} = ae^{j\pi fa} \text{sinc}(\pi fa)$$

Ce qui donne par transformée de Fourier inverse :

$$h(t) = \Pi_a\left(t + \frac{a}{2}\right)$$

2. Un filtre est réalisable si :

- sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  est réelle : OK ici
- il est stable, c'est-à-dire qu'il vérifie la condition de stabilité  $\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < \infty$  : OK ici car  $\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt = a$
- il est causal : non OK ici : pour  $t < 0$  on a  $h(t) \neq 0$

Ce filtre n'est donc pas réalisable.

3.  $E[y(t)] = E\left[\int_t^{t+a} x(u) du\right] = \int_t^{t+a} E[x(u)] du = 0$

4.  $S_y(f) = |H_a(f)|^2 S_x(f) = a^2 \text{sinc}^2(\pi fa) S_x(f)$  (voir relations de Wiener Lee)

**Exercise 4.6** On considère un signal aléatoire  $x(t)$  stationnaire de moyenne  $m$ , de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ . Etant donnés deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $b > a > 0$ , on forme le signal

$$y(t) = \int_{t+a}^{t+b} x(u) du - \int_{t-a}^{t-b} x(u) du$$

1. Montrer que le signal  $y(t)$  est obtenu par filtrage linéaire de  $x(t)$ . Déterminer la transmittance et la réponse impulsionnelle de ce filtre.
2. Déterminer la moyenne et la densité spectrale de puissance de  $y(t)$  en fonction de celles de  $x(t)$ .

*Correction.*

$x(t)$  stationnaire de moyenne  $m$ , de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ .

1. Si on fait  $x(t) = e^{j2\pi ft}$ , alors on obtient

$$y(t) = \int_{t+a}^{t+b} e^{j2\pi fu} du - \int_{t-a}^{t-b} e^{j2\pi fu} du = \frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi f} \left[ e^{j2\pi fb} - e^{j2\pi fa} - e^{-j2\pi fb} + e^{-j2\pi fa} \right]$$

On voit donc que  $y(t)$  s'écrit sous la forme  $y(t) = e^{j2\pi ft} H(f)$ , ce qui signifie que  $y(t)$  est le résultat d'un filtrage linéaire de  $x(t)$  par un filtre de fonction de transfert

$$H(f) = \frac{\sin(2\pi fb) - \sin(2\pi fa)}{\pi f}$$

Pour déterminer la réponse impulsionnelle du filtre, le plus simple est de prendre  $x(t) = \delta(t)$  et on obtient

$$h(t) = \int_{t+a}^{t+b} \delta(u) du - \int_{t-a}^{t-b} \delta(u) du = \int_{t+a}^{t+b} \delta(u) du + \int_{t-b}^{t-a} \delta(u) du$$

d'où

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-b, -a] \\ 1 & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Puisque  $y(t)$  est obtenu par filtrage linéaire de  $x(t)$  et que  $x(t)$  est un processus aléatoire stationnaire,  $y(t)$  est un processus stationnaire (voir cours). Sa moyenne est définie par

$$E[y(t)] = \int_{t+a}^{t+b} E[x(u)] du - \int_{t-a}^{t-b} E[x(u)] du = m(b-a) - m(a-b) = 2m(b-a)$$

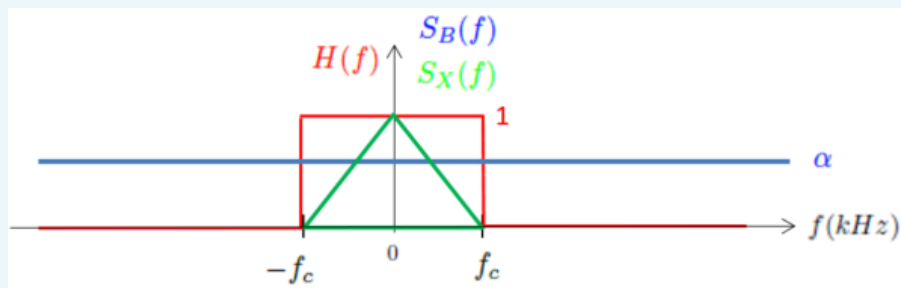
La densité spectrale de puissance de  $y(t)$  s'obtient à l'aide des relations de Wiener Lee

$$s_y(f) = s_x(f) |H(f)|^2 = s_x(f) \frac{[\sin(2\pi fb) - \sin(2\pi fa)]^2}{\pi^2 f^2}$$

■

#### Exercice 4.7 — Calcul de la puissance d'un bruit filtré.

Soit un signal aléatoire stationnaire  $X(t)$ , de densité spectrale de puissance  $S_X(f)$  représentée en vert sur la figure suivante. Ce signal est bruité par un bruit blanc,  $B(t)$ , de densité spectrale de puissance  $S_B(f) = \alpha \forall f$ ,  $\alpha$  étant une constante. Le signal bruité,  $X(t) + B(t)$ , passe dans un filtre linéaire de type passe-bas idéal, de fréquence de coupure  $f_c$  : voir figure suivante, où  $H(f)$  représente la réponse en fréquence du filtre passe-bas.



1. Calculer le rapport signal sur bruit en sortie du filtre.
2. Evaluer le rapport signal sur bruit en sortie du filtre en décibels pour  $\alpha = 1V^2/Hz$ .
3. Que signifie un rapport signal sur bruit négatif en décibels ?

■

*Correction.*

1. Le signal n'est pas abimé par le filtre. La puissance du signal en sortie du filtre est donc identique à celle en entrée et est donnée par  $\int_R S_X(f) df = f_c$ .



La densité spectrale de puissance du bruit en sortie du filtre est donnée par  $|H(f)|^2 S_B(f)$  (voir relations de Wiener Lee), d'où sa puissance :

$$\int_{\mathcal{R}} |H(f)|^2 S_B(f) df = 2\alpha f_c.$$

Le rapport signal sur bruit est donc donné par

$$RSB = \frac{f_c}{2\alpha f_c} = \frac{1}{2\alpha}$$

2.  $RSB_{dB} = 10 \log_{10} SNR = 10 \log_{10} \frac{1}{2} = -3dB$ .
3. Un rapport signal sur bruit négatif en décibels signifie qu'il y a plus de bruit que de signal. La puissance du bruit est deux fois plus grande que celle du signal pour un rapport signal sur bruit de  $-3$  dB



#### Exercice 4.8 — Calcul d'un Rapport Signal sur Bruit (RSB) en sortie d'un filtre linéaire.

On considère un filtre (linéaire invariant dans le temps) de réponse impulsionnelle  $h(t)$

$$h(t) = \begin{cases} \exp(-at) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

avec  $a > 0$ . On applique à l'entrée de ce filtre un signal aléatoire  $x(t)$  constitué de la somme d'un signal sinusoïdal  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ , où  $A$  et  $f_0$  sont deux constantes, et d'un bruit blanc stationnaire  $b(t)$  de densité spectrale de puissance  $s_b(f) = \sigma_b^2, \forall f$ , c'est-à-dire  $x(t) = s(t) + b(t)$ .

1. Montrer que la transmittance de ce filtre s'écrit

$$H(f) = TF[h(t)] = \frac{1}{a + j2\pi f}.$$

2. Déterminer la puissance  $P_{y_b}$  du signal  $y_b(t)$  défini par

$$y_b(t) = b(t) * h(t).$$

3. Déterminer l'expression du signal filtré

$$y_s(t) = s(t) * h(t)$$

et en déduire sa puissance notée  $P_{y_s}$ .

4. En déduire le rapport signal sur bruit du signal filtré défini par

$$RSB = \frac{P_{y_s}}{P_{y_b}}$$

et montrer qu'il est maximal pour  $a = 2\pi f_0$ .

5. Il est habituel d'exprimer le rapport signal sur bruit en décibels. Rappelez la définition de ce rapport signal sur bruit noté  $\text{RSB}_{dB}$ .

Que signifient  $\text{RSB}_{dB} = 0\text{dB}$ ,  $\text{RSB}_{dB} = 20\text{dB}$  et  $\text{RSB}_{dB} = -20\text{dB}$  ?

*Correction.*

1. La transmittance de ce filtre s'écrit

$$H(f) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a + j2\pi f}.$$

2. La densité spectrale de puissance de  $y_b(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} s_{y_b}(f) &= s_b(f) |H(f)|^2 \\ &= \frac{\sigma_b^2}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

d'où la puissance de  $y_b$

$$P_{y_b} = \int \frac{\sigma_b^2}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df$$

On fait le changement de variables  $2\pi f = au$  et on obtient

$$P_{y_b} = \int \frac{\sigma_b^2}{a^2 + a^2 u^2} \frac{a}{2\pi} du = \frac{\sigma_b^2}{2a}$$

3. La TF du signal filtré s'écrit

$$\begin{aligned} Y_s(f) &= S(f)H(f) \\ &= \frac{A}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] M(f) e^{j\phi(f)} \end{aligned}$$

avec  $H(f) = M(f) e^{j\phi(f)}$ . On en déduit

$$\begin{aligned} Y_s(f) &= \frac{A}{2} [\delta(f + f_0) M(-f_0) e^{j\phi(-f_0)} + \delta(f - f_0) M(f_0) e^{j\phi(f_0)}] \\ &= \frac{A}{2} M(f_0) [\delta(f + f_0) e^{-j\phi(f_0)} + \delta(f - f_0) e^{j\phi(f_0)}] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \frac{A}{2} M(f_0) [e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\phi(f_0)} + e^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi(f_0)}] \\ &= AM(f_0) \cos[2\pi f_0 t + \phi(f_0)] \end{aligned}$$

et donc la puissance de  $y_s(t)$  est

$$P_{y_s} = \frac{A^2 M^2(f_0)}{2} = \frac{A^2}{2 [a^2 + 4\pi^2 f_0^2]}.$$

4. Le rapport signal sur bruit du filtre s'écrit

$$\begin{aligned} \text{RSB} &= \frac{P_{y_s}}{P_{y_b}} \\ &= \frac{A^2}{\sigma_b^2} \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f_0^2} = g(a). \end{aligned}$$

Le numérateur de  $g'(a)$  s'écrit (à une constante multiplicative près)

$$\begin{aligned} h(a) &= a^2 + 4\pi^2 f_0^2 - 2a^2 \\ &= 4\pi^2 f_0^2 - a^2 \end{aligned}$$

Le RSB est donc maximal pour  $a = 2\pi f_0$ .

5. Le rapport signal sur bruit en décibels est défini par

$$\text{RSB}_{dB} = 10 \log_{10} \left[ \frac{P_{y_s}}{P_{y_b}} \right]$$

donc

- $\text{RSB}_{dB} = 0\text{dB}$  signifie que la puissance du signal est égale à la puissance du bruit
- $\text{RSB}_{dB} = 20\text{dB}$  signifie que la puissance du signal est cent fois supérieure à la puissance du bruit
- $\text{RSB}_{dB} = -20\text{dB}$  signifie que la puissance du signal est cent fois inférieure à la puissance du bruit



#### Exercice 4.9 — Filtrage d'un signal aléatoire.

On considère un signal aléatoire stationnaire  $X(t)$  de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $s_X(f) = 2a$ , où  $a$  est une constante positive. Le signal  $Y(t)$  est obtenu par filtrage linéaire (invariant dans le temps) de  $X(t)$  avec un filtre de transmittance

$$H(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Déterminer la densité spectrale de puissance, la fonction d'autocorrélation et la puissance du signal  $Y(t)$



*Correction.*

D'après la relation de Wiener-Lee, la densité spectrale de puissance de  $Y(t)$  est

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= s_X(f) |H(f)|^2 \\ &= \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation de  $Y(t)$  est donc

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \text{TF}^{-1} [s_Y(f)] \\ &= e^{-a|\tau|} \text{ (voir tables)} \end{aligned}$$

et par suite la puissance de  $Y(t)$  est

$$E [Y^2(t)] = R_Y(0) = 1$$



#### Exercice 4.10 — Filtre dérivateur.

On considère un signal aléatoire stationnaire  $x(t)$  de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$  et on considère le signal  $y(t)$  défini par

$$y(t) = x'(t)$$

où  $x'(t)$  est la dérivée du signal  $x(t)$ . Le signal  $y(t)$  est-il obtenu par filtrage linéaire de  $x(t)$ ? Si

oui, préciser la transmittance de ce filtre. On suppose que  $x(t)$  est un signal de densité spectrale de puissance  $s_x(f) = \frac{1}{f^2}$ ,  $f \in \mathbb{R}$ . Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal  $y(t)$ . Comment appelle-t-on un signal qui possède cette fonction d'autocorrélation ? ■

*Correction.*

Pour déterminer si  $y(t) = x'(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée  $x(t)$ , on peut utiliser l'isométrie fondamentale. En remplaçant  $x(t)$  par  $e^{j2\pi ft}$  dans l'expression de  $y(t)$ , on obtient

$$y(t) \leftrightarrow (j2\pi f)e^{j2\pi ft}.$$

On en déduit que  $y(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire de transmittance  $H(f) = j2\pi f$ . D'après la relation de Wiener-Lee

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2 = 4\pi^2.$$

En conséquence

$$R_x(\tau) = 4\pi^2 \delta(\tau).$$

Le signal  $y(t)$  est un bruit blanc. ■

#### Exercice 4.11 — Dérivée première moins dérivée seconde.

On considère un signal aléatoire stationnaire  $X(t)$  de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation  $R(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s(f)$ . On construit le signal  $Z(t)$  défini par

$$Z(t) = X'(t) - X''(t)$$

où  $X'(t)$  et  $X''(t)$  sont les dérivées première et seconde du processus aléatoire  $X(t)$ .

- 1) Montrer que  $Z(t)$  est le résultat d'un filtrage linéaire de  $X(t)$  par un filtre dont on déterminera la transmittance.
- 2) Déterminer la densité spectrale de puissance de  $Z(t)$  en fonction de celle de  $X(t)$ . ■

*Correction.*

montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire, il suffit de déterminer la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  et de vérifier qu'elle s'écrit  $\exp(j2\pi ft)H(f)$ , où  $H(f)$  est une quantité indépendante de  $t$  qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification). Dans l'exemple de cet exercice, la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  est

$$(j2\pi f)\exp(j2\pi ft) - (j2\pi f)^2 \exp(j2\pi ft) = \exp(j2\pi ft)H(f)$$

avec

$$H(f) = j2\pi f + 4\pi^2 f^2.$$

D'après la relation de Wiener-Lee, on a

$$s_Z(f) = s(f)|H(f)|^2 = s(f)(4\pi^2 f^2)(1 + 4\pi^2 f^2).$$

■

**Exercice 4.12 — Zoom Spectral Pour Signaux Déterministes.**

1) On considère un signal déterministe à énergie finie à valeurs réelles noté  $x(t)$  de transformée de Fourier

$$X(f) = A [\Lambda_F(f - f_0) + \Lambda_F(f + f_0)]$$

avec

$$\Lambda_F(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{F} & \text{si } |f| < F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $f_0 > F > 0$  (on notera que  $X(f)$  est une fonction paire).

1) On forme le signal

$$x_1(t) = x(t) \exp[-i2\pi f_0 t]$$

Déterminer la transformée de Fourier de  $x_1(t)$  notée  $X_1(f)$ .

2) On filtre le signal  $x_1(t)$  à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de façon à ne conserver que la partie du spectre de  $x_1(t)$  associée aux fréquences vérifiant  $|f| < F$ . Déterminer le signal résultant noté  $x_2(t)$ .

3) Le signal  $x_2(t)$  est comprimé de manière à obtenir

$$x_3(t) = x_2(Mt) \text{ avec } M > 1.$$

Expliquer pourquoi l'opération qui fait passer de  $x_2(t)$  à  $x_3(t)$  peut être qualifiée de "compression". Déterminer la transformée de Fourier de  $x_3(t)$  notée  $X_3(f)$ .

4) Pour terminer, on module le signal  $x_3(t)$  de manière à générer

$$x_4(t) = x_3(t) \exp[i2\pi f_0 t]$$

Déterminer la transformée de Fourier de  $x_4(t)$  notée  $X_4(f)$ .

5) Représenter graphiquement  $X_1(f)$ ,  $X_2(f)$ ,  $X_3(f)$  et  $X_4(f)$  (pour toutes ces représentations graphiques, on prendra  $f_0 = 5\text{kHz}$  et  $F = 1\text{kHz}$ ) et expliquer pourquoi l'opération qui transforme le signal  $x(t)$  en  $x_4(t)$  peut être qualifiée de "zoom" spectral. ■

1. *Correction.*

1. La transformée de Fourier de  $x_1(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} X_1(f) &= X(f) * \delta(f + f_0) \\ &= X(f + f_0) \\ &= A [\Lambda_F(f) + \Lambda_F(f + 2f_0)]. \end{aligned}$$

2. Si on ne conserve que les fréquences appartenant à l'intervalle  $[-F, +F]$ , on obtient

$$X_2(f) = A\Lambda_F(f).$$

Le signal filtré  $x_2(t)$  s'écrit donc

$$x_2(t) = TF^{-1}[X_2(f)] = AF \operatorname{sinc}^2(\pi Ft)$$

avec

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

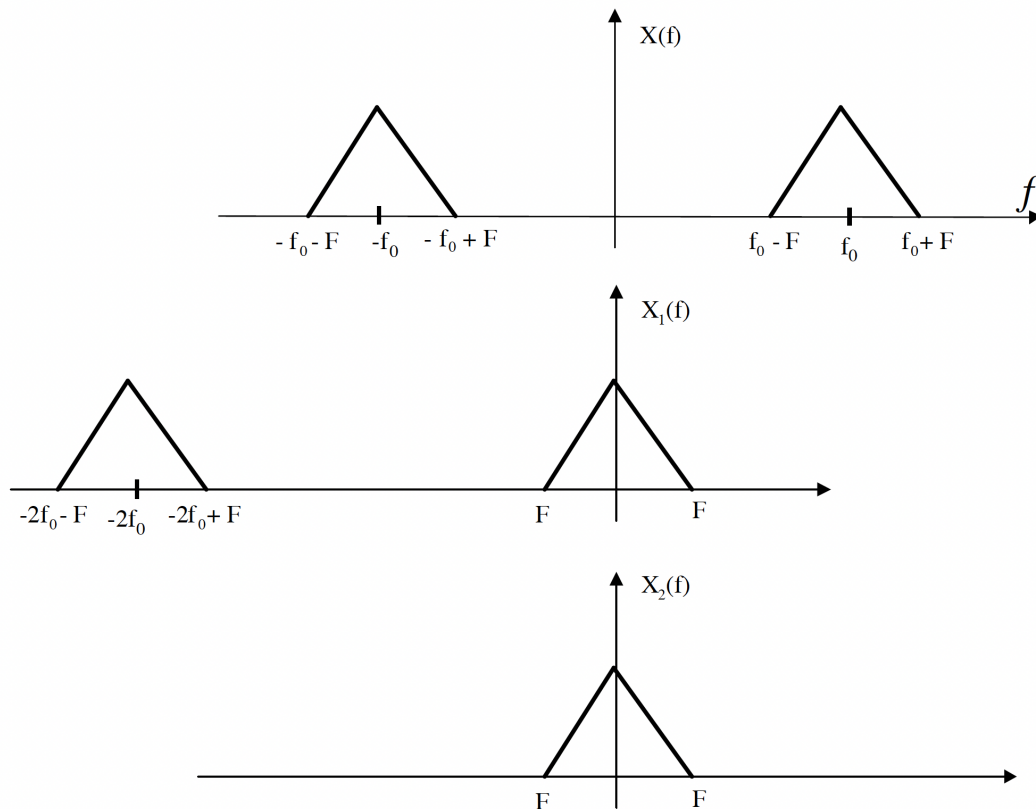
3. Si le support temporel de  $x_2(t)$  est  $[-A, A]$ , celui de  $x_3(t)$  est  $[-A/M, A/M]$ ; De plus, l'allure temporelle des signaux  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$  sont similaires. Le signal  $x_3(t)$  est donc bien obtenu par compression du signal  $x_2(t)$ . La transformée de Fourier de  $x_3(t)$  s'écrit

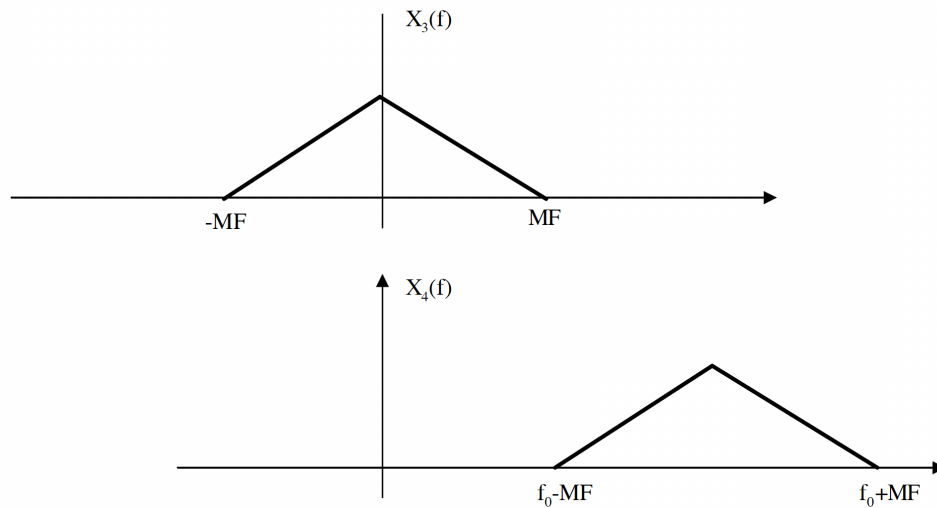
$$X_3(f) = \frac{1}{M} X_2\left(\frac{f}{M}\right) = \frac{A}{M} \Lambda_F\left(\frac{f}{M}\right).$$

4. La transformée de Fourier de  $x_4(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} X_4(f) &= X_3(f) * \delta(f - f_0) \\ &= X_3(f - f_0) \\ &= \frac{A}{M} \Lambda_F\left(\frac{f - f_0}{M}\right). \end{aligned}$$

5. En observant le spectre de  $x_4(t)$ , on s'aperçoit que les opérations successives décrites dans les questions 1), 2), 3) et 4) ont étalé le spectre situé autour de la fréquence  $f_0$  du signal d'origine, ce qui correspond à un zoom spectral. Les opérations indiquées sont illustrées sur les figures ci-dessous





#### Exercice 4.13 — Zoom Spectral Pour Signaux Aléatoires.

On considère un signal aléatoire stationnaire  $X(t)$  de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance

$$s_X(f) = A [\Lambda_F(f - f_0) + \Lambda_F(f + f_0)]$$

avec

$$\Lambda_F(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{F} & \text{si } |f| < F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $f_0 > F > 0$ . Pour toutes les représentations graphiques demandées dans cet exercice, on prendra  $f_0 = 5\text{kHz}$  et  $F = 1\text{kHz}$ .

- 1) Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal  $X(t)$ .
- 2) On forme le signal

$$x_1(t) = x(t) \exp[-i2\pi f_0 t]$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée  $R_1(\tau)$ ) et la densité spectrale de puissance (notée  $s_1(f)$ ) du signal  $x_1(t)$ . Représenter graphiquement  $s_1(f)$ .

- 3) On filtre le signal  $x_1(t)$  à l'aide d'un filtre de fonction de transfert

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -F \leq f \leq F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la densité spectrale de puissance (notée  $s_2(f)$ ) et la fonction d'autocorrélation (notée  $R_2(\tau)$ ) du signal résultant noté  $x_2(t)$ . Représenter graphiquement  $s_2(f)$ .

- 4) Le signal  $x_2(t)$  est comprimé de manière à obtenir

$$x_3(t) = x_2(Mt) \text{ avec } M > 1.$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée  $R_3(\tau)$ ) et la densité spectrale de puissance (notée  $s_3(f)$ ) du signal  $x_3(t)$ . Représenter graphiquement  $s_3(f)$ .

5) Pour terminer, on module le signal  $x_3(t)$  de manière à générer

$$x_4(t) = x_3(t) \exp[i2\pi f_0 t]$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation (notée  $R_4(\tau)$ ) et la densité spectrale de puissance (notée  $s_4(f)$ ) du signal  $x_4(t)$ . Représenter graphiquement  $s_4(f)$ . ■

*Correction.*

1. La fonction d'autocorrélation du signal  $X(t)$  est la transformée de Fourier inverse de  $s_X(f)$ , soit

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= ATF^{-1} [\Lambda_F(f - f_0) + \Lambda_F(f + f_0)] \\ &= ATF^{-1} [\Lambda_F(f)] \exp(2\pi f_0 \tau) + ATF^{-1} [\Lambda_F(f)] \exp(-2\pi f_0 \tau) \\ &= 2AF \sin^2[\pi F \tau] \cos(2\pi f_0 \tau). \end{aligned}$$

2. La fonction d'autocorrélation du signal  $x_1(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} R_1(\tau) &= E[x_1(t)x_1^*(t - \tau)] \\ &= E[x(t) \exp(-i2\pi f_0 t) x^*(t - \tau) \exp(i2\pi f_0(t - \tau))] \\ &= \exp(-i2\pi f_0 \tau) E[x(t)x^*(t - \tau)] \\ &= \exp(-i2\pi f_0 \tau) R_X(\tau) \end{aligned}$$

d'où sa densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned} s_1(f) &= TF[R_1(\tau)] \\ &= \delta(f + f_0) * s_X(f) \\ &= s_X(f + f_0) \\ &= A[\Lambda_F(f) + \Lambda_F(f + 2f_0)]. \end{aligned}$$

3. Si on filtre le signal  $x_1(t)$  on obtient, en appliquant la relation de Wiener-Lee, un signal  $x_2(t)$  de densité spectrale de puissance

$$s_2(f) = s_1(f) |H(f)|^2.$$

Avec le filtre proposé, on obtient

$$s_2(f) = A\Lambda_F(f)$$

d'où

$$R_2(\tau) = AF \sin^2(\pi F \tau).$$

4. La fonction d'autocorrélation du signal  $x_3(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} R_3(\tau) &= E[x_3(t)x_3^*(t - \tau)] \\ &= E[x_2(Mt)x_2^*(Mt - M\tau)] \\ &= R_2(M\tau) \end{aligned}$$

d'où sa densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned} s_3(f) &= TF[R_3(\tau)] \\ &= \frac{1}{M} s_2\left(\frac{f}{M}\right) \\ &= \frac{A}{M} \Lambda_F\left(\frac{f}{M}\right). \end{aligned}$$



5. Si on module le signal  $x_3(t)$  comme demandé, on obtient

$$\begin{aligned} R_4(\tau) &= E[x_4(t)x_4^*(t-\tau)] \\ &= E[x_3(t)\exp(i2\pi f_0 t)x_3^*(t-\tau)\exp(-i2\pi f_0(t-\tau))] \\ &= \exp(i2\pi f_0 \tau) E[x_3(t)x_3^*(t-\tau)] \\ &= \exp(i2\pi f_0 \tau) R_3(\tau) \end{aligned}$$

d'où la densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned} s_4(f) &= \delta(f-f_0) * s_3(f) \\ &= s_3(f-f_0) \\ &= \frac{A}{M} \Lambda_F\left(\frac{f-f_0}{M}\right). \end{aligned}$$

6. On obtient la même expression qu'à la question 5) de l'exercice précédent. On a donc effectué un zoom autour de la fréquence  $f_0$  sur la densité spectrale de puissance du signal d'origine. Les opérations indiquées sont illustrées sur les figures ci-dessous

■

#### Exercice 4.14 — Amplitude et fréquence aléatoires.

On considère un signal aléatoire  $Z(t)$  défini par

$$Z(t) = A \exp[2j\pi Bt]$$

où  $j^2 = -1$ ,  $A$  est une variable aléatoire uniforme sur  $] -1, +1[$ ,  $B$  est une variable aléatoire indépendante de  $A$  possédant une loi de Laplace de densité

$$f(b) = \frac{1}{2} \exp(-|b|), b \in \mathbb{R}.$$

On rappelle qu'une variable aléatoire  $A$  uniforme sur  $] -1, +1[$  vérifie  $E[A] = 0$  et  $E[A^2] = 1/3$ .

- 1) Montrer que  $Z(t)$  est un signal aléatoire stationnaire.
- 2) Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de  $Z(t)$
- 3) On considère un filtre de transmittance  $H(f) = e^{-3|f|}$  dont l'entrée est le signal  $Z(t)$ . Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal de sortie  $W(t) = Z(t) * h(t)$  avec  $h(t) = \text{TF}^{-1}[H(f)]$ .

*Correction.*

1. Le signal  $Z(t)$  est stationnaire si sa moyenne  $E[Z(t)]$  et sa fonction d'autocorrélation  $E[Z(t)Z^*(t-\tau)]$  sont des quantités indépendantes du temps. En utilisant le fait que les variables aléatoires  $A$  et  $B$  sont indépendantes, on obtient

$$E[Z(t)] = E[A]E\{\exp[2j\pi Bt]\} = 0 \text{ (car } E[A] = 0\text{)}.$$

De même

$$\begin{aligned} E[Z(t)Z^*(t-\tau)] &= E[A^2]E\{\exp[2j\pi Bt]\exp[-2j\pi B(t-\tau)]\} \\ &= \frac{1}{3}E\{\exp(2j\pi B\tau)\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

qui est une quantité indépendante de  $t$ . Le signal  $Z(t)$  est donc stationnaire au second ordre.

2. D'après la question précédente

$$\begin{aligned}
 E[Z(t)Z^*(t-\tau)] &= \frac{1}{3}E[\exp(2j\pi B\tau)] \\
 &= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2j\pi b\tau)p(b)db \\
 &= \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2j\pi b\tau)\exp(-|b|)db.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

On peut calculer cette intégrale de manière directe

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty}\exp(2j\pi b\tau)\exp(-|b|)db &= \int_{-\infty}^0\exp(2j\pi b\tau)\exp(b)db + \int_0^{\infty}\exp(2j\pi b\tau)\exp(-b)db \\
 &= \frac{1}{2j\pi\tau+1} + \frac{1}{1-2j\pi\tau} = \frac{2}{4\pi^2\tau^2+1}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

ce qui permet d'obtenir

$$R_Z(\tau) = \frac{1}{3(1+4\pi^2\tau^2)}.$$

Mais on peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned}
 E[Z(t)Z^*(t-\tau)] &= \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2j\pi b\tau)\exp(-|b|)db \\
 &= \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2j\pi f\tau)\exp(-|f|)df \\
 &= \frac{1}{6}\text{TF}^{-1}\left[e^{-|f|}\right] \\
 &= \frac{1}{6}\times\frac{2}{1+4\pi^2\tau^2} = \frac{1}{3(1+4\pi^2\tau^2)}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

La densité spectrale de puissance du signal  $Z(t)$  est

$$s_Z(f) = \text{TF}[R_Z(\tau)] = \frac{1}{6}e^{-|f|}.$$

3. D'après la relation de Wiener-Lee

$$\begin{aligned}
 s_W(f) &= s_Z(f)|H(f)|^2 \\
 &= \frac{1}{6}e^{-|f|}\times e^{-6|f|} = \frac{1}{6}e^{-7|f|}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$R_W(\tau) = \text{TF}^{-1}\left[\frac{1}{6}e^{-7|f|}\right] = \frac{1}{6}\times\frac{1}{7}\times\frac{2\times 49}{49+4\pi^2\tau^2} = \frac{7}{3(49+4\pi^2\tau^2)}.$$

■

#### Exercice 4.15 — Détection de changements de moyenne.

On considère un processus aléatoire réel stationnaire  $X(t)$  de moyenne  $m = E[X(t)]$ , de fonction d'autocorrélation  $R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$  et de densité spectrale de puissance  $s_X(f)$ .

Pour  $T > 0$ , on construit le signal aléatoire  $Y(t)$  comme suit

$$Y(t) = \int_t^{t+T} X(u)du - \int_{t-T}^t X(u)du.$$

- 1) Montrer que l'opération liant  $X(t)$  et  $Y(t)$  est une opération de filtrage linéaire (invariant dans le temps) et que la transmittance s'écrit  $H(f) = 2jT \operatorname{sinc}(\pi fT) \sin(\pi fT)$ . Déterminer la réponse impulsionnelle  $h(t)$  associée à  $H(f)$ .
- 2) Déterminer la moyenne du signal  $Y(t)$  et la densité spectrale de puissance de  $Y(t)$  en fonction de celle de  $X(t)$ .
- 3) Expliquer l'utilité pratique du filtre liant  $X(t)$  et  $Y(t)$ . ■

*Correction.*

1. Pour montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire, il suffit de déterminer la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  et de vérifier qu'elle s'écrit  $\exp(j2\pi ft)H(f)$ , où  $H(f)$  est une quantité indépendante de  $t$  qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification). Dans l'exemple de cet exercice, la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  est

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_t^{t+T} \exp(j2\pi fu)du - \int_{t-T}^t \exp(j2\pi fu)du \\ &= \frac{\exp(j2\pi f(t+T)) - \exp(j2\pi ft)}{j2\pi f} - \frac{\exp(j2\pi ft) - \exp(j2\pi f(t-T))}{j2\pi f} \\ &= \exp(j2\pi ft)H(f) \end{aligned}$$

avec

$$H(f) = \frac{\exp(j2\pi fT) - 1}{j2\pi f} - \frac{1 - \exp(-j2\pi fT)}{j2\pi f}$$

Donc  $Y(t)$  est obtenu par filtrage de  $X(t)$  avec un filtre de transmittance  $H(f)$  définie ci-dessus. La réponse impulsionnelle de ce filtre est  $h(t) = \text{TF}^{-1}[H(f)]$ . Pour déterminer cette transformée de Fourier inverse, on peut décomposer  $H(f)$  comme suit

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1}{j2\pi f} [e^{j\pi fT} (e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) - e^{-j\pi fT} (e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT})] \\ &= 2jT \operatorname{sinc}(\pi fT) \sin(\pi fT) \\ &= T \operatorname{sinc}(\pi fT) [\exp(j\pi fT) - \exp(-j\pi fT)] \end{aligned}$$

On en déduit

$$h(t) = 2j\Pi_T(t) * \left[ \frac{1}{2j} (\delta(t+T/2) - \delta(t-T/2)) \right] = \Pi_T\left(t + \frac{T}{2}\right) - \Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

2. Les relations de Wiener-Lee permettent d'obtenir

$$E[Y(t)] = E[X(t)]H(0) = 0.$$

et

$$s_Y(f) = s_X(f)|H(f)|^2 = 4T^2 s_X(f) \operatorname{sinc}^2(\pi fT) \sin^2(\pi fT).$$

3. Le filtre soustrait la moyenne du signal  $X(t)$  après l'instant  $t$  à la moyenne du signal  $X(t)$  avant l'instant  $t$ . Si ces deux moyennes sont proches, on a  $Y(t)$  proche de 0. Si ces moyennes sont très différentes,  $Y(t)$  aura une valeur importante. Ce filtre peut donc être utilisé pour détecter des changements de moyenne dans le signal  $X(t)$ . ■

#### Exercice 4.16 — Système multitrajet.

1. Soit le signal déterministe défini par :

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\lambda t} \quad t \geq 0 \quad \lambda > 0 \\ &= 0 \quad t < 0 \end{aligned}$$

- (a) Calculer la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$  (en distinguant les cas  $\tau \geq 0$  et  $\tau \leq 0$ ).  
 (b) Calculer la transformée de Fourier de  $x(t)$ , puis sa densité spectrale de puissance et retrouver enfin l'expression de sa fonction d'autocorrélation déterminée précédemment.
2. Considérons un système multitrajet d'entrée  $x(t)$  et de sortie  $y(t)$  défini par :

$$y(t) = \sum_{k=1}^M a_k x(t - \tau_k)$$

- (a) Montrer que  $y(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée  $x(t)$ . Exprimer la réponse impulsionnelle et la réponse en fréquence de ce filtre.  
 (b) Exprimer la fonction d'intercorrélation entre  $y(t)$  et  $x(t)$  notée  $R_{yx}(\tau)$  en fonction de  $R_x(\tau)$ .  
 (c) Si le signal déterministe de la question 1 est mis à l'entrée du système multitrajet, à quelle(s) condition(s) sur  $\lambda$  et les  $\tau_k$  peut-on alors identifier les paramètres du système  $\{a_k, \tau_k\}_{k=1, M}$  à partir de la fonction d'intercorrélation  $R_{yx}(\tau)$  ■

*Correction.*

1. (a) Ce signal est déterministe à énergie finie :

$$E = \int_R |x(t)|^2 dt = \frac{A^2}{2\lambda}$$

D'où :

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_R x(t)x^*(t-\tau) dt \\ &= \begin{cases} \int_0^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt = \frac{A^2}{2\lambda} e^{\lambda\tau} & \tau < 0 \\ \int_{\tau}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt = \frac{A^2}{2\lambda} e^{-\lambda\tau} & \tau \geq 0 \end{cases} \\ &= \frac{A^2}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|} \quad \forall \tau \end{aligned}$$

- (b) Dans ce cas

$$S_x(f) = |X(f)|^2$$

avec

$$X(f) = \int_0^{+\infty} A e^{-\lambda t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A}{\lambda + j2\pi f}$$

D'où

$$S_x(f) = \frac{A^2}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$$

et donc (tables de TF) :

$$R_X(\tau) = TF^{-1}[S_X(f)] = \frac{A^2}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

2. (a)

$$y(t) = \sum_{k=1}^M a_k \delta(t - \tau_k) * x(t)$$

Nous avons bien une relation de filtrage linéaire entre  $x(t)$  et  $y(t)$ , avec

$$h(t) = \sum_{k=1}^M a_k \delta(t - \tau_k)$$

et

$$H(f) = \sum_{k=1}^M a_k e^{-j2\pi f \tau_k}$$

Remarque : on peut également le montrer en plaçant  $x(t) = e^{-j2\pi f t}$  à l'entrée du filtre et en montrant qu'on obtient alors  $y(t) = x(t)H(f)$ .

(b) En utilisant une des relations de Wiener Lee :

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) = \sum_{k=1}^M a_k R_x(\tau - \tau_k)$$

(c) La détection de la position et de la hauteur des pics qui apparaissent dans  $R_{yx}(\tau)$  permet de retrouver les  $a_k$  et  $\tau_k$  qui caractérisent le canal multitrajet et pourrait donc permettre de corriger les distorsions introduites. ■

#### Exercice 4.17 — Système réverbérant.

Considérons un système "réverbérant" d'entrée  $x(t)$  et de sortie  $y(t)$  défini par :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma^k x(t - kT)$$

1. Calculer la réponse impulsionnelle du système et sa réponse en fréquence (ou transmittance).
2. Calculer la Densité Spectrale d'Énergie (DSE) de  $y(t)$ .
3. Peut-on évaluer  $\gamma$  et  $T$  à partir de cette DSE ? ■

Correction.

1.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \delta(t - kT) * x(t)$$

D'où

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \delta(t - kT)$$

et donc

$$\begin{aligned} H(f) &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \exp -j2\pi f k T \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\gamma \exp -j2\pi f T]^k \\ &= \frac{1}{1 - \gamma \exp -j2\pi f T} \end{aligned}$$

2. Calculer la Densité Spectrale d'Énergie (DSE) de  $y(t)$ .

$$\begin{aligned} S_y(f) &= |H(f)|^2 S_x(f) \\ &= \frac{1}{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos(2\pi f T)} S_x(f) \end{aligned}$$

3. Peut-on évaluer  $\gamma$  et  $T$  à partir de cette DSE ?

$$\frac{S_y(f)}{S_x(f)} = \frac{1}{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos(2\pi f T)} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \gamma^2} & \text{quand } \cos(2\pi f T) = 1 \\ \frac{1}{1 + \gamma^2} & \text{quand } \cos(2\pi f T) = -1 \end{cases}$$

On pourra mesurer la période de  $\frac{S_y(f)}{S_x(f)}$  pour obtenir  $T$  et les maxima et minima pour obtenir  $\gamma$ . ■

#### Exercice 4.18 — Détection d'un signal aléatoire.

L'objectif de cet exercice est de détecter la présence d'un signal aléatoire  $x(t)$  à partir de deux signaux  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  définis comme suit

$$x_1(t) = [x(t) + b_1(t)] * h_1(t) \quad \text{et} \quad x_2(t) = [x(t) + b_2(t)] * h_2(t)$$

où  $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$  et  $x(t)$  sont trois signaux aléatoires stationnaires indépendants deux à deux représentant respectivement le bruit associé au signal  $x_1$ , le bruit associé au signal  $x_2$  et le signal d'intérêt, et où  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$  sont les réponses impulsionnelles de deux filtres linéaires (invariants dans le temps). On suppose également que les bruits  $b_1(t)$  et  $b_2(t)$  sont stationnaires de moyennes nulles, c'est-à-dire  $E[b_1(t)] = E[b_2(t)] = 0$ . Pour détecter la présence du signal  $x(t)$ , on propose de multiplier les deux signaux  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  pour former le signal  $z(t) = x_1(t)x_2(t)$  et ensuite de

filtrer  $z(t)$  à l'aide d'un filtre moyennneur pour obtenir le signal  $m(t)$  défini comme suit

$$m(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t z(u) du.$$

1. On commence par étudier l'opération de filtrage par moyennage qui transforme  $z(t)$  en  $m(t)$  et on suppose que  $z(t)$  est un signal aléatoire stationnaire.

- Justifier que l'opération reliant  $z(t)$  et  $m(t)$  est une opération de filtrage linéaire.
- Déterminer la réponse impulsionnelle  $h(t)$  et la transmittance  $H(f)$  de ce filtre.
- Déterminer la moyenne de  $m(t)$  en fonction de  $m_z = E[z(t)]$ .
- Déterminer la puissance du signal  $m(t)$  sous la forme d'une intégrale d'une fonction dépendant de  $g_z(f)$  et de  $T$ .

2. Pour commencer, on suppose que  $x(t) = 0$  (absence de signal d'intérêt).

- Déterminer la moyenne du signal  $z(t)$ .
- Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal  $z(t)$  en fonction de celles de  $x_1(t) = b_1(t) * h_1(t)$  et  $x_2(t) = b_2(t) * h_2(t)$ .
- En supposant que les bruits  $b_1(t)$  et  $b_2(t)$  sont des bruits blancs de densités spectrales de puissance  $s_{b_1}(f) = N_1$  et  $s_{b_2}(f) = N_2$ , en déduire la densité spectrale de puissance  $s_z(f)$  (sous forme intégrale) en fonction de  $N_1, N_2, H_1(f)$  et  $H_2(f)$ . Que devient cette expression de  $s_z(f)$  lorsque

$$H_1(f) = H_2(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{F}{2} \leq f \leq \frac{F}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec  $F > 0$ .

3. Dans un second temps, on suppose que le signal d'intérêt est présent, c'est-à-dire que  $x(t) \neq 0$ .

- On suppose d'abord que  $b_1(t) = b_2(t) = 0$  (absence de bruit). En utilisant un résultat du cours (à préciser), expliquer pourquoi la fonction d'intercorrélacion des signaux  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  (définis au début de cet exercice) s'écrit

$$R_{x_1, x_2}(\tau) = E[x_1(t)x_2^*(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f\tau} H_1(f)H_2^*(f)s_x(f)df.$$

- Expliquer pourquoi ce résultat reste valable en présence de bruit, c'est-à-dire pour  $b_1(t) \neq 0$  et  $b_2(t) \neq 0$ .
- En déduire la moyenne de  $z(t)$  sous la forme d'une intégrale dépendant de  $H_1(f), H_2(f)$  et  $s_x(f)$ . On suppose que  $x(t)$  est un signal de puissance  $P_x$  de densité spectrale de puissance à bande limitée  $[-F/2, F/2]$  et que les filtres  $H_1(f)$  et  $H_2(f)$  sont définis comme à la question précédente. Montrer alors que  $E[z(t)] = P_x$ .
- Déterminer la moyenne de  $m(t)$  en présence (hypothèse  $H_1$ ) et en l'absence (hypothèse  $H_0$ ) du signal  $x(t)$  et expliquer comment détecter la présence ou l'absence du signal  $x(t)$  à l'aide de la sortie du filtre moyennneur  $m(t)$ .

*Correction.*

1. On procède comme suit :

- Il y a différentes manières de répondre à cette question. La plus simple est probablement de déterminer la réponse harmonique (ou de manière équivalente d'utiliser l'isométrie fondamentale) qui consiste à faire  $z(t) = \exp(j2\pi vt)$  et à vérifier que  $m(t)$  s'écrit alors

$m(t) = H(\nu) \exp(j2\pi\nu t)$ . Si c'est le cas,  $m(t)$  est obtenu par filtrage de  $z(t)$  avec un filtre de transmittance  $H(f)$ . Si ce n'est pas le cas,  $m(t)$  et  $z(t)$  ne sont pas liés par une relation de filtrage. Dans le cas présent, quand on remplace  $z(t)$  par  $\exp(j2\pi\nu t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \exp(j2\pi\nu u) du \\ &= \frac{1}{j2\pi\nu T} [\exp(j2\pi\nu t) - \exp(j2\pi\nu(t-T))] \\ &= \exp(j2\pi\nu t) H(\nu) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \frac{1}{j2\pi\nu T} [1 - \exp(-j2\pi\nu T)] \\ &= \frac{\exp(-j\pi\nu T)}{j2\pi\nu T} [2j \sin(\pi\nu T)] \\ &= \exp(-j\pi\nu T) \operatorname{sinc}(\pi\nu T) \end{aligned}$$

Donc,  $m(t)$  est obtenu par filtrage de  $z(t)$  avec un filtre de transmittance  $H(f)$ .

- L'expression de  $H(f)$  a été déterminée à la question précédente. Celle de  $h(t)$  s'obtient par transformée de Fourier inverse

$$h(t) = \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) * \left[\frac{1}{T} \Pi_T(t)\right] = \frac{1}{T} \Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

- La moyenne de  $m(t)$  s'écrit

$$E[m(t)] = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t E[z(u)] du = m_z.$$

- La puissance de  $z(t)$  s'écrit

$$P_z = E[z^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(f) df.$$

En utilisant la relation de Wiener-Lee, on obtient

$$P_z = \int_{-\infty}^{+\infty} g_z(f) |H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} s_z(f) \operatorname{sinc}^2(\pi f T) df.$$

Pour étudier la moyenne et la puissance de  $m(t)$ , on a donc besoin de déterminer  $E[z(t)]$  et  $s_z(f)$ , ce qui est l'objet de la prochaine question.

2. • Quand  $x(t) = 0$ , on a

$$z(t) = x_1(t)x_2(t) = [b_1(t) * h_1(t)] [b_2(t) * h_2(t)].$$

En utilisant l'indépendance entre  $b_1(t)$  et  $b_2(t)$ , on obtient

$$E[z(t)] = E[b_1(t) * h_1(t)] E[b_2(t) * h_2(t)] = 0$$

car les bruits  $b_1(t)$  et  $b_2(t)$  sont de moyennes nulles.



- La fonction d'autocorrélation du signal  $z(t) = x_1(t)x_2(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E[z(t)z(t-\tau)] \\ &= E[x_1(t)x_2(t)x_1(t-\tau)x_2(t-\tau)] \\ &= R_{x_1}(\tau)R_{x_2}(\tau) \end{aligned}$$

la dernière égalité ayant été obtenue en utilisant l'indépendance entre les bruits  $b_1(t)$  et  $b_2(t)$ .

- D'après l'expression de la fonction d'autocorrélation du signal ( $z(t)$ ), on obtient

$$\begin{aligned} s_z(f) &= s_{x_1}(f) \cdot s_{x_2}(f) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_{x_1}(u)s_{x_2}(f-u)du \end{aligned}$$

avec  $s_{x_1}(f) = N_1 |H_1(f)|^2$  et  $s_{x_2}(f) = N_2 |H_2(f)|^2$ . On en déduit

$$g_z(f) = N_1 N_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(u)|^2 |H_1(f-u)|^2 du.$$

3.
  - Il s'agit de l'application directe de la formule des interférences.
  - en présence de bruit, on a  $x_1(t) = x(t) * h_1(t) + b_1(t) * h_1(t)$  et  $x_2(t) = x(t) * h_2(t) + b_2(t) * h_2(t)$ . La fonction d'autocorrélation du produit  $z(t) = x_1(t)x_2(t)$  va donc comporter quatre termes. En utilisant l'indépendance entre les bruits  $b_1(t)$  et  $b_2(t)$  et le fait que ces bruits sont de moyennes nulles, on observe que trois de ces termes sont nuls et donc on retrouve l'expression précédente.
  - La moyenne du signal  $z(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} E[z(t)] &= E[x_1(t)x_2(t)] \\ &= R_{x_1 x_2}(0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(f)H_2^*(f)s_x(f)df \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} s_x(f)df = P_x \end{aligned}$$

- D'après les résultats précédents, on a

$$E[m(t)] = \begin{cases} 0 & \text{si le signal } x(t) \text{ est absent} \\ P_x & \text{si le signal } x(t) \text{ est présent} \end{cases}$$

Pour détecter la présence du signal  $x(t)$ , il suffit d'estimer la moyenne de  $m(t)$ , par exemple à l'aide d'une moyenne arithmétique, et de comparer cette moyenne à un seuil judicieusement choisi (par exemple fixé à l'aide d'une probabilité de fausse alarme de référence).

■

**Exercice 4.19 — Annulateur de bruit.**

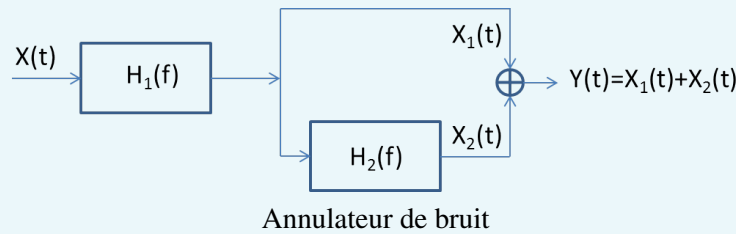
Soit  $X(t)$  un bruit blanc stationnaire, réel, de densité spectrale de puissance  $S_X(f) = \frac{N_0}{2} \forall f$  ( $N_0$  est une constante), attaquant le système décrit par la figure suivante, où  $H_1(f)$  est un filtre passe-bande défini par :

$$H_1(f) = 1 \quad \text{pour} \quad |f| \in \left[ f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2} \right]$$

$$= 0 \quad \text{ailleurs}$$

et  $H_2(f)$  une ligne à retard  $T$  réglable définie par :

$$H_2(f) = e^{-i2\pi T f}$$



1. Calculer la puissance du signal de sortie,  $Y(t)$ , en fonction de la puissance et de l'autocorrélation du signal  $X_1(t)$ , respectivement notées  $P_{X_1}$  et  $R_{X_1}(\tau)$ .
2. Calculer  $P_{X_1}$  en fonction de  $N_0$  et de  $\Delta f$ .
3. Calculer  $R_{X_1}(\tau)$  en fonction de  $N_0$  et de  $\Delta f$ .
4. En déduire l'expression de la puissance de  $Y(t)$  en fonction de  $N_0$ ,  $\Delta f$  et  $T$ .
5. Que se passe-t-il lorsque :
  - $T \approx \frac{1}{2f_0}$  ?
  - $T \gg \frac{1}{\Delta f}$  ?

*Correction.*

1.

$$\begin{aligned} P_Y &= E [Y^2(t)] \\ &= E [(X_1(t) + X_2(t))^2] \\ &= E [X_1^2(t)] + E [X_2^2(t)] + 2E [X_1(t)X_2(t)] \\ &= P_{X_1} + P_{X_2} + 2R_{X_1 X_2}(0) \end{aligned}$$

Ecrivons  $X_2(t)$  en fonction de  $X_1(t)$  :

$$H_2(f) = e^{j2\pi f T}$$

D'où

$$h_2(t) = \delta(t - T)$$

et donc on a bien une ligne à retard :

$$X_2(t) = X_1(t) * h_2(t) = X_1(t - T)$$

$$\begin{aligned}
 R_{X_1 X_2}(0) &= E[X_1(t)X_2(t)] \\
 &= E[X_1(t)X_1(t-T)] \\
 &= R_{X_1}(T)
 \end{aligned}$$

et  $P_{X_1} = P_{X_2}$  car  $S_{X_2}(f) = |H_2(f)|^2 S_{X_1}(f) = S_{X_1}(f)$

D'où :

$$P_Y = 2(P_{X_1} + R_{X_1}(T))$$

$$2. P_{X_1} = \int_R S_{X_1}(f) df = \int_R \frac{N_0}{2} |H_1(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \times 2\Delta f = N_0 \Delta f$$

$$3. R_{X_1}(\tau) = TF^{-1}[S_{X_1}(f)] = TF^{-1}\left[\frac{N_0}{2} (\Pi_{\Delta f}(f-f_0) + \Pi_{\Delta f}(f+f_0))\right] = N_0 \Delta f \operatorname{sinc}(\pi \Delta f \tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$4. P_Y = 2N_0 \Delta f (1 + \operatorname{sinc}(\pi \Delta f T) \cos(2\pi f_0 T))$$

5. Que se passe-t-il lorsque :

$$- T \approx \frac{1}{2f_0} ?$$

$\cos(2\pi f_0 T) \simeq -1$  et  $\operatorname{sinc}(\pi \Delta f T) \simeq 1$ , d'où  $P_Y \simeq 0$  : grâce au filtre de réponse en fréquence  $H_2(f)$  on a donc annulé le bruit  $X(t)$

$$- T \gg \frac{1}{\Delta f} ?$$

$\operatorname{sinc}(\pi \Delta f T) \simeq 0$ , d'où  $P_Y \simeq 2N_0 \Delta f = P_{X_1} + P_{X_2}$  :  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  sont décorrélés. ■

%endexercice

#### Exercice 4.20 — Filtrés Intégrateurs.

Soit  $Z(t)$  un processus aléatoire stationnaire, de moyenne nulle et pourvu d'une densité spectrale régulière  $s_Z(f)$ .

1. Soit

$$V_a(t) = \int_a^{a+t} Z(u) du \quad a \neq 0$$

Montrer que  $V_a(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire (que l'on précisera) dont l'entrée est  $Z(t)$ .

En déduire la moyenne, la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation du processus  $V_a(t)$ . Déterminer  $E[V_a(t)V_b^*(t-\tau)]$ .

2. Montrer que  $V_a(t)$  est dérivable et déterminer  $V_a'(t)$ .

3. Soit

$$W(t) = \int_0^t Z(u) du$$

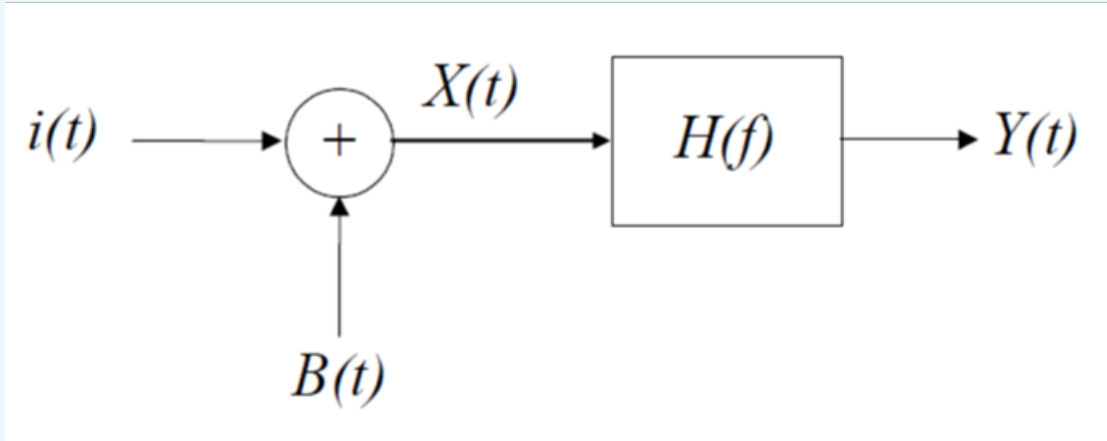
Le processus  $W(t)$  est-il stationnaire ? ■

Correction.

this is the correction ■

**Exercice 4.21 — Filtrage de Wiener.**

On considère le système suivant



où  $i(t)$  est l'information utile qui est perturbée par un bruit additif  $B(t)$  stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation  $R_b(\tau) = E[B(t)B^*(t - \tau)]$ . On suppose que l'information  $i(t)$  est un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation  $R_i(\tau) = E[i(t)i^*(t - \tau)]$  et on observe uniquement le signal  $X(t)$ . Le but de ce problème est de construire un filtre de transmittance  $H(f)$  (appelé filtre de Wiener) permettant d'estimer l'information  $i(t)$  à partir du signal  $X(t)$ , c'est-à-dire tel que  $Y(t)$  soit le plus proche possible de  $i(t)$  (on aura alors effectué un débruitage du signal  $X(t)$ ). On peut montrer que le filtre solution de ce problème vérifie les équations normales définies par

$$E\{[i(t) - Y(t)]X^*(u)\} = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

1. En supposant que les signaux  $i(t)$  et  $B(t)$  sont indépendants, déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de  $X(t)$  en fonction de celles de  $i(t)$  et  $B(t)$ . Montrer que les équations normales permettent d'obtenir

$$R_i(t - u) = \int h(v)R_x(t - u - v)dv, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Puisque ce résultat est valable  $\forall u \in \mathbb{R}$ , on en déduit

$$R_i(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau)$$

En déduire que la transmittance recherchée vérifie

$$H(f) = \frac{s_i(f)}{s_i(f) + s_B(f)}$$

où  $s_i(f)$  et  $s_B(f)$  sont les densités spectrales de puissance des signaux  $i(t)$  et  $B(t)$ . Remarque : si vous n'arrivez pas à résoudre cette question, vous pouvez admettre le résultat (1) et continuer le problème.

2. On suppose que  $B(t)$  est un bruit blanc de densité spectrale de puissance  $s_B(f) = \sigma_b^2$  et que  $i(t)$  est obtenu par filtrage d'un bruit blanc  $e(t)$  de densité spectrale de puissance  $s_e(f) = 1$  par un filtre de réponse impulsionnelle

$$\pi_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Déterminer la transmittance de ce filtre, puis  $s_i(f)$  et enfin  $H(f)$ . En déduire la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du filtre de Wiener en fonction de  $a$  et  $\sigma_b^2$ .

3. Déterminer les limites de  $H(f)$  et de  $h(t)$  lorsque  $\sigma_b^2 \rightarrow 0$ . Interpréter ce résultat. ■

*Correction.*

1. En utilisant la relation  $x(t) = i(t) + B(t)$ , on a

$$\begin{aligned} E[x(t)x^*(t-\tau)] &= E[i(t)i^*(t-\tau)] + E[i(t)B^*(t-\tau)] + E[B(t)i^*(t-\tau)] + E[B(t)B^*(t-\tau)] \\ &= R_i(\tau) + E[i(t)B^*(t-\tau)] + E[B(t)i^*(t-\tau)] + R_B(\tau) \end{aligned}$$

Puisque les signaux  $i(t)$  et  $B(t)$  sont indépendants et de moyennes nulles, on en déduit

$$R_x(\tau) = R_i(\tau) + R_B(\tau)$$

et donc

$$s_x(f) = s_i(f) + s_B(f)$$

Les équations normales s'écrivent

$$E\{[i(t) - Y(t)]X^*(u)\} = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$E[i(t)X^*(u)] = E[Y(t)X^*(u)], \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

En utilisant à nouveau l'indépendance entre  $i(t)$  et  $B(t)$ , le terme de gauche de cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} E[i(t)X^*(u)] &= E[i(t)i^*(u)] + E[i(t)B^*(u)] \\ &= R_i(t-u) + E[i(t)]E[B^*(u)] \\ &= R_i(t-u) \end{aligned}$$

Le terme de droite s'écrit

$$\begin{aligned} E[Y(t)X^*(u)] &= E\left\{\left[\int h(v)X(t-v)dv\right]X^*(u)\right\} \\ &= \int h(v)E[X(t-v)X^*(u)]dv \\ &= \int h(v)R_x(t-v-u)dv \end{aligned}$$

On en déduit

$$R_i(t-u) = \int h(x)R_x(t-u-x)dx, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

et puisque ce résultat est valable  $\forall u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} R_i(\tau) &= \int h(x)R_x(\tau-x)dx, \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \\ &= h(\tau) * R_x(\tau) \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier de cette équation, on obtient finalement

$$s_i(f) = H(f)s_x(f)$$

c'est-à-dire à partir

$$H(f) = \frac{s_i(f)}{s_i(f) + s_B(f)}$$

2. La transmittance associée à la réponse impulsionnelle

$$\pi_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

est

$$\begin{aligned} \text{TF}[\pi_a(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \left[ \frac{e^{-(a+j2\pi ft)}}{-(a+j2\pi ft)} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+j2\pi f} \end{aligned}$$

En utilisant la relation de Wiener-Lee et le fait que  $i(t)$  est obtenu par le filtrage de  $e(t)$  par un filtre de réponse impulsionnelle  $\pi_a(t)$ , on obtient

$$s_i(f) = \frac{s_e(f)}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{s_i(f)}{s_i(f) + s_B(f)} \\ &= \frac{\frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2}}{\frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} + \sigma_b^2} \\ &= \frac{1}{1 + \sigma_b^2 (a^2 + 4\pi^2 f^2)} \end{aligned}$$

La réponse impulsionnelle du filtre de Wiener est la transformée de Fourier inverse de  $H(f)$

$$\begin{aligned} h(t) &= \text{TF}^{-1} \left[ \frac{1}{1 + a^2 \sigma_b^2 + 4\pi^2 \sigma_b^2 f^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_b^2} \text{TF}^{-1} \left[ \frac{1}{\frac{1}{\sigma_b^2} + a^2 + 4\pi^2 f^2} \right] \end{aligned}$$

En posant

$$\omega^2 = \frac{1}{\sigma_b^2} + a^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\omega\sigma_b^2} \text{TF}^{-1} \left[ \frac{2\omega}{\omega^2 + 4\pi^2 f^2} \right] \\ &= \frac{1}{2\omega\sigma_b^2} e^{-\omega|t|} \end{aligned}$$

3. Lorsque  $\sigma_b^2 \rightarrow 0$ , on observe d'après (4)

$$\lim_{\sigma_b^2 \rightarrow 0} H(f) = 1$$

d'où

$$h(t) = \delta(t)$$

Interprétation : dans le cas où  $\sigma_b^2 \rightarrow 0$  il n'y a pas de bruit additif  $B(t)$ . Donc, on observe  $X(t) = i(t) + B(t) = i(t)$  et on cherche le filtre qui permet de retrouver  $i(t)$  à partir de  $X(t) = i(t)$ . Ce filtre est de réponse impulsionnelle  $h(t) = \delta(t)$  car

$$i(t) * \delta(t) = i(t)$$

■

#### Exercice 4.22 — filtrage adapté.

On considère un signal déterministe à énergie finie  $s(t)$  défini sur l'intervalle  $[0, T]$  perturbé par un bruit  $b(t)$  additif stationnaire de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation  $R_b(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_b(f)$

$$x(t) = s(t) + b(t)$$

On filtre le signal  $x(t)$  à l'aide d'un filtre linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle  $h(t)$  et de transmittance  $H(f)$  et on note  $y(t) = x(t) * h(t)$  la sortie de ce filtre.

1. On note  $y_s(t_0)$  la sortie du filtre à l'instant  $t_0$  lorsque l'entrée est  $s(t)$ . Montrer que

$$y_s(t_0) = \int_{\mathbb{R}} S(f)H(f)e^{j2\pi ft_0} df$$

où  $S(f)$  est la transformée de Fourier du signal  $s(t)$ . Déterminer  $y_s(t_0)$  lorsque

$$s(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tracer  $y_s(t_0)$  en fonction de  $t_0$ .

2. Soit  $y_b(t_0)$  la sortie du filtre à l'instant  $t_0$  lorsque l'entrée est  $b(t)$ . Montrer que la puissance du signal  $y_b(t_0)$  s'écrit

$$E[y_b^2(t_0)] = \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_b(f) df$$

Déterminer cette puissance pour  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$  et pour le filtre de la question précédente.

3. On admet que le filtre qui maximise le rapport signal sur bruit à l'instant  $t_0$  défini par

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_b^2(t_0)]}$$

est de transmittance

$$H_0(f) = k \frac{S^*(f)}{s_b(f)} e^{-j2\pi f t_0}$$

où  $k$  est une constante. Dans le cas d'un bruit blanc défini par  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ , déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre notée  $h_0(t)$  en fonction de  $k, N_0, t_0$  et du signal  $s(t)$ . Tracer  $h_0(t)$  dans le cas du signal  $s(t) = A\Pi_T(t - \frac{T}{2})$ .

4. On choisit  $t_0 = T$  et on suppose que  $s(t) = A\Pi_T(t - \frac{T}{2})$ ,  $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi_T(t - \frac{T}{2})$  et que  $b(t)$  est un bruit blanc (de moyenne nulle) de densité spectrale de puissance  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ .

- Déterminer  $y_s(T)$
- Montrer que  $y_b(T)$  s'écrit

$$y_b(T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T b(u) du$$

En déduire la moyenne de  $y_b(T)$  notée  $E[y_b(T)]$ . On admettra que la variance de  $y_b(t)$  est  $\frac{N_0}{2}$ . On suppose maintenant que  $y_b(T)$  est un signal Gaussien. Déterminer la densité de probabilité du signal  $y(T) = y_s(T) + y_b(T)$  notée  $p[y(T) | A]$ . On rappelle que la densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  Gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$  s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

On suppose que l'amplitude du signal déterministe  $A$  peut prendre deux valeurs, à savoir Hypothèse  $H_0$  :  $A = -1$  Hypothèse  $H_1$  :  $A = +1$  et on désire déterminer quelle hypothèse est vérifiée à partir du signal reçu  $y(T)$  (qui est la sortie du filtre adapté à l'instant  $t_0 = T$ ). On adopte la stratégie suivante

$$H_0 \text{ est acceptée si } p[y(T) | A = -1]P[A = -1] > p[y(T) | A = +1]P[A = +1]$$

En notant  $p = P[A = +1]$  et  $q = 1 - p = P[A = -1]$ , montrer que cette stratégie consiste à comparer  $y(T)$  à un seuil qu'on explicitera en fonction de  $p, N_0$  et  $T$ . Que devient cette règle si  $p = q = \frac{1}{2}$  ?

*Correction.*

1. Puisque  $s(t)$  un signal à énergie finie,  $y_s(t)$  est aussi à énergie finie et

$$Y_s(f) = TF[y_s(t)] = S(f)H(f)$$

Done

$$\begin{aligned} y_s(t) &= TF^{-1}[S(f)H(f)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} S(f)H(f)e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$



En faisant  $t = t_0$  dans cette égalité, on obtient le résultat demandé. Lorsque  $s(t) = AI_{[0,T]}(t)$ , on a

$$S(f) = AT \operatorname{sinc}(\pi T f) e^{-j\pi T f}$$

De plus, si  $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} I_{[0,T]}(t)$ , on a

$$H(f) = \sqrt{T} \operatorname{sinc}(\pi T f) e^{-j\pi T f}$$

d'où

$$y_s(t) = A\sqrt{T} \int_{\mathbb{R}} T \operatorname{sinc}^2(\pi T f) e^{j2\pi f(t-T)} df$$

Mais

$$\begin{aligned} TF^{-1} [T \operatorname{sinc}^2(\pi T f)] &= \Lambda_T(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} T \operatorname{sinc}^2(\pi T f) e^{j2\pi f \tau} df \end{aligned}$$

Done

$$y_s(t_0) = A\sqrt{T} \Lambda_T(t_0 - T)$$

2. La relation de Wiener-Lee permet d'obtenir

$$s_{y_b}(f) = |H(f)|^2 s_b(f)$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{y_b} &= E [y_b^2(t)] = R_{y_b}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} s_{y_b}(f) df \\ &= \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_b(f) df \end{aligned}$$

Lorsque  $b(t)$  est un bruit blanc de densité spectrale de puissance  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$  et pour le filtre de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} P_{y_b} &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 dt \quad (\text{égalité de Parseval}) \\ &= \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

3. Dans le cas d'un bruit blanc défini par  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ , on a

$$H_0(f) = \frac{2k}{N_0} S^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

donc

$$\begin{aligned} h_0(t) &= TF^{-1} [H_0(f)] \\ &= \frac{2k}{N_0} TF^{-1} [S^*(f) e^{-j2\pi f t_0}] \end{aligned}$$

La TF inverse de  $S^*(f)$  est

$$TF^{-1} [S^*(f)] = s^*(-t)$$

donc

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \frac{2k}{N_0} s^*[-(t-t_0)] \\ &= \frac{2k}{N_0} s^*[t_0-t] \end{aligned}$$

4. On choisit  $t_0 = T$  et on suppose que  $s(t) = AI_{[0,T]}(t)$ ,  $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}I_{[0,T]}(t)$  et que  $b(t)$  est un bruit blanc de densité spectrale de puissance  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ . - D'après ce qui précède, on a

$$y_s(t_0) = A\sqrt{T}\Lambda_T(t_0 - T)$$

Donc en faisant  $t_0 = T$ , on obtient

$$y_s(T) = A\sqrt{T}$$

- De plus

$$\begin{aligned} y_b(t) &= b(t) * h(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u)b(t-u)du \\ &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}}b(t-u)du \end{aligned}$$

En faisant  $t = T$  et en effectuant le changement de variables  $v = T - u$ , on obtient

$$y_b(T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T b(v)dv$$

On en déduit

$$\begin{aligned} E[y_b(T)] &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T E[b(v)]dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T 0dv = 0 \end{aligned}$$

La variance de  $y_b(T)$  est donc

$$\begin{aligned} \text{var}[y_b(T)] &= E[y_b^2(T)] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E[b(u)b(v)]dudv \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(u-v)dudv \\ &= \frac{N_0}{2T} \int_0^T \left[ \int_0^T \delta(u-v)du \right] dv \\ &= \frac{N_0}{2T} \int_0^T dv \\ &= \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

Si  $y_b(T)$  est un signal Gaussien, comme  $y_s(T)$  est un signal déterministe,  $y(T) = y_s(T) + y_b(T)$  est aussi un signal Gaussien de moyenne

$$E[y(T)] = y_s(T) + E[y_b(T)] = y_s(T) = A\sqrt{T}$$

et de variance

$$\text{var}[y(T)] = \text{var}[y_s(T) + y_b(T)] = \text{var}[y_b(T)] = \frac{N_0}{2}$$

Sa densité de probabilité s'écrit donc

$$p[y(T); A] = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[ -\frac{(y(T) - A\sqrt{T})^2}{N_0} \right]$$

5. La stratégie  $H_0$  est acceptée si  $p[y(T); A = -1]P[A = -1] > p[y(T); A = +1]P[A = +1]$  consiste à accepter  $H_0$  si

$$\frac{q}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[ -\frac{(y(T) + \sqrt{T})^2}{N_0} \right] > \frac{p}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[ -\frac{(y(T) - \sqrt{T})^2}{N_0} \right]$$

c'est-à-dire

$$\ln q - \frac{(y(T) + \sqrt{T})^2}{N_0} > \ln p - \frac{(y(T) - \sqrt{T})^2}{N_0} \iff \ln q - \frac{2\sqrt{T}y(T)}{N_0} > \ln p + \frac{2\sqrt{T}y(T)}{N_0}$$

d'où finalement

$$H_0 \text{ est acceptée si } y(T) < \ln \left( \frac{q}{p} \right) \frac{N_0}{2\sqrt{T}}$$

Dans le cas où  $p = q = \frac{1}{2}$ , on en déduit  $H_0$  est acceptée si  $y(T) < 0$  ce qui est une règle de décision logique. ■

#### Exercice 4.23 — Analyse cepstrale d'un signal réel à énergie finie.

Le cepstre d'un signal réel à énergie finie  $x(t)$  de transformée de Fourier  $X(f)$  est défini par

$$c_x(\tau) = TF^{-1} \left\{ \ln \left[ |X(f)|^2 \right] \right\}$$

1. Montrer que si  $y(t)$  est obtenu par filtrage linéaire de  $x(t)$ , i.e. si  $y(t) = x(t) * h(t)$ , on a

$$c_y(\tau) = c_x(\tau) + c_h(\tau).$$

2. On considère la somme d'un signal à énergie finie  $x(t)$  et d'un écho défini par

$$y(t) = x(t) + ax(t - T),$$

avec  $a > 0$  et  $T > 0$ . Montrer que  $y(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée  $x(t)$ . Quelles sont la réponse impulsionnelle  $h(t)$  et la fonction de transfert  $H(f)$  de ce filtre ?

3. On désire déterminer le cepstre de  $h(t)$ . On rappelle que le développement limité de la fonction  $\ln(1+x)$  valable pour  $|x| \leq 1$  est

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

En posant  $\gamma = \frac{2a}{a^2+1} < 1$  et en supposant que  $\gamma$  est suffisamment petit pour qu'on puisse négliger les termes d'ordres  $\gamma^k$  avec  $k > 2$ , donner un développement limité de  $\ln [|H(f)|^2]$  et déterminer une approximation du cepstre de  $h(t)$  résultant de ce développement limité..

4. Expliquer comment identifier le retard  $T$  à partir du cepstre du signal  $y(t)$  moyennant certaines conditions que l'on précisera. ■

*Correction.*

Puisque  $x(t)$  et  $y(t)$  sont des signaux à énergie finie, on peut calculer leurs transformées de Fourier notées  $X(f)$  et  $Y(f)$ .

1. Si  $y(t) = x(t) * h(t)$ , alors  $Y(f) = X(f)H(f)$ , et donc

$$\ln [|Y(f)|^2] = \ln [|X(f)|^2] + \ln [|H(f)|^2]$$

d'où

$$c_y(\tau) = c_x(\tau) + c_h(\tau).$$

2. En prenant la transformée de Fourier de

$$y(t) = x(t) + ax(t - T),$$

on obtient

$$Y(f) = X(f) [1 + ae^{-j2\pi fT}]$$

donc la transmittance de ce filtre est

$$H(f) = 1 + ae^{-j2\pi fT}$$

La réponse impulsionnelle  $h(t)$  s'obtient par transformée de Fourier inverse de  $H(f)$

$$h(t) = \delta(t) + a\delta(t - T)$$

3. Le module carré de  $H(f)$  se détermine facilement

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= |1 + ae^{-j2\pi fT}|^2 \\ &= 1 + a^2 + 2a \cos(2\pi fT) \\ &= (1 + a^2) \left[ 1 + \frac{2a}{1 + a^2} \cos(2\pi fT) \right] \\ &= (1 + a^2) [1 + \gamma \cos(2\pi fT)] \end{aligned}$$

d'où

$$\ln [|H(f)|^2] = \ln (1 + a^2) + \ln [1 + \gamma \cos(2\pi fT)]$$

Puisque  $0 < \gamma < 1$ , on a  $|\gamma \cos(2\pi fT)| < 1$  et on peut utiliser le développement limité proposé

$$\ln [1 + \gamma \cos(2\pi fT)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} [\gamma \cos(2\pi fT)]^{k+1}.$$

En ne conservant que les premiers termes, on obtient

$$\begin{aligned}\ln[1 + \gamma \cos(2\pi fT)] &\simeq \gamma \cos(2\pi fT) - \frac{1}{2}[\gamma \cos(2\pi fT)]^2 \\ &\simeq \gamma \cos(2\pi fT) - \frac{\gamma^2}{2} \left[ \frac{1 + \cos(4\pi fT)}{2} \right]\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}c_h(\tau) &\simeq \ln(1 + a^2) \delta(\tau) + \frac{\gamma}{2}[\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)] - \frac{\gamma^2}{4} \left[ \delta(\tau) + \frac{1}{2}\delta(\tau - 2T) + \frac{1}{2}\delta(\tau + 2T) \right] \\ &\simeq \left[ \ln(1 + a^2) - \frac{\gamma^2}{4} \right] \delta(\tau) + \frac{\gamma}{2}[\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)] - \frac{\gamma^2}{8}[\delta(\tau - 2T) + \delta(\tau + 2T)]\end{aligned}$$

4. Le cepstre de  $y(t)$  est défini par  $c_y(\tau) = c_x(\tau) + c_h(\tau)$ , donc si le cepstre de  $x(t)$  n'interfère pas avec les raies de  $c_h(\tau)$ , on peut identifier  $T$  en recherchant les raies présentes dans  $c_y(\tau)$ . ■

#### Exercice 4.24 — Analyse cepstrale d'un signal aléatoire stationnaire.

Le cepstre d'un signal aléatoire réel stationnaire  $x(t)$  de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$  est défini par

$$c_x(\tau) = TF^{-1} \{ \ln [s_x(f)] \}.$$

1. On considère la somme d'un signal aléatoire stationnaire  $x(t)$  et d'un écho défini par

$$y(t) = x(t) + ax(t - T),$$

avec  $a > 0$  et  $T > 0$ . Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal  $y(t)$ .

2. Déterminer le cepstre du signal  $y(t)$  défini ci-dessus. La procédure d'identification du retard  $T$  proposée au paragraphe 1) est-elle applicable dans le contexte des signaux aléatoires stationnaires ?

3. On suppose dans cette partie qu'on reçoit deux signaux aléatoires stationnaires notés  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  définis comme suit

$$\begin{aligned}y_1(t) &= x(t) + a_1x(t - T_1) \\ y_2(t) &= [x(t) + a_2x(t - T_2)] * g(t)\end{aligned}$$

où  $g(t)$  est la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire que l'on cherche à identifier. Déterminer les cepstres de ces deux signaux notés  $c_{y_1}(\tau)$  et  $c_{y_2}(\tau)$  et expliquer sous quelles conditions on peut à l'aide de  $c_{y_2}(\tau) - c_{y_1}(\tau)$  identifier le filtre de réponse impulsionnelle  $g(t)$ . 4. On désire maintenant étudier l'influence d'un bruit additif  $n(t)$  de moyenne nulle sur l'estimation du retard  $T$ . On considère donc le signal

$$z(t) = x(t) + ax(t - T) + n(t)$$

où  $x(t)$  et  $n(t)$  sont des signaux aléatoires stationnaires indépendants. Déterminer la densité spectrale de puissance de  $z(t)$  notée  $s_z(f)$  en fonction de celles de  $x(t)$  et  $n(t)$  notées  $s_x(f)$  et

$s_n(f)$ . Montrer alors que

$$\ln [s_z(f)] = \ln [(1 + a^2) s_x(f)] + A(f) + \ln [1 + \gamma B(f) \cos(2\pi fT)]$$

où  $\gamma = \frac{2a}{a^2+1}$ ,  $A(f)$  est un bruit défini par

$$A(f) = \ln \left[ 1 + \frac{s_n(f)}{(1 + a^2) s_x(f)} \right]$$

et  $B(f)$  est un autre bruit dont on précisera l'expression. ■

*Correction.*

1. Puisque  $x(t)$  et  $y(t)$  sont des signaux aléatoires, la fonction d'autocorrélation du signal  $y(t) = x(t) + ax(t - T)$  est définie par

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E[y(t)y(t - \tau)] \\ &= E[x(t)x(t - \tau)] + aE[x(t - T)x(t - \tau)] \\ &\quad + aE[x(t)x(t - \tau - T)] + a^2E[x(t - T)x(t - \tau - T)] \\ &= R_x(\tau) + aR_x(\tau - T) + aR_x(\tau + T) + a^2R_x(\tau) \\ &= (1 + a^2)R_x(\tau) + a[R_x(\tau - T) + R_x(\tau + T)] \end{aligned}$$

La densité spectrale de puissance s'en déduit

$$\begin{aligned} s_y(f) &= s_x(f) [1 + a^2 + ae^{-j2\pi fT} + ae^{j2\pi fT}] \\ &= s_x(f) [1 + a^2 + 2a \cos(2\pi fT)] \end{aligned}$$

Remarque : on retrouve ces résultats en utilisant les relations de Wiener-Lee.

2. Le cepstre du signal  $y(t)$  s'obtient alors comme suit

$$\begin{aligned} c_y(\tau) &= TF^{-1} \{ \ln [s_y(f)] \} \\ &= TF^{-1} \{ \ln [s_x(f)] \} + TF^{-1} \{ \ln [1 + a^2 + 2a \cos(2\pi fT)] \} \\ &= c_x(\tau) + c_h(\tau). \end{aligned}$$

On retrouve donc la même relation qu'avec les signaux à énergie finie donc la procédure d'identification du retard  $T$  est applicable dans le contexte des signaux stationnaires.

3. D'après ce qui précède, les cepstres des signaux  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  définis par

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t) + a_1x(t - T_1), \\ y_2(t) &= [x(t) + a_2x(t - T_2)] * g(t), \end{aligned}$$

sont définis par

$$\begin{aligned} c_{y_1}(\tau) &= c_x(\tau) + c_{h_1}(\tau) \\ c_{y_2}(\tau) &= c_x(\tau) + c_{h_2}(\tau) + c_g(\tau) \end{aligned}$$

d'où

$$c_{y_2}(\tau) - c_{y_1}(\tau) = c_{h_2}(\tau) - c_{h_1}(\tau) + c_g(\tau)$$

Dans la mesure où les fonctions  $c_{h_2}(\tau) - c_{h_1}(\tau)$  et  $c_g(\tau)$  ne se superposent pas (ce qui est une condition simple à réaliser car  $c_{h_2}(\tau) - c_{h_1}(\tau)$  ne contient que quelques raies), on peut estimer  $c_g(\tau)$  à partir de  $c_{y_2}(\tau) - c_{y_1}(\tau)$  et en déduire une estimation de la transmittance du filtre  $G(f)$ .

4. On désire maintenant étudier l'influence d'un bruit additif  $n(t)$  sur l'estimation du retard  $T$ . Comme les signaux  $x(t)$  et  $n(t)$  sont indépendants,  $x^*(t) = x(t) + ax(t - T)$  le sont aussi. La densité spectrale de puissance de  $z(t)$  s'écrit donc

$$\begin{aligned}
 s_z(f) &= s_x(f) [1 + a^2 + 2a \cos(2\pi fT)] + s_n(f) \\
 &= (1 + a^2) s_x(f) [1 + \gamma \cos(2\pi fT)] + s_n(f) \\
 &= (1 + a^2) s_x(f) \left[ 1 + \gamma \cos(2\pi fT) + \frac{s_n(f)}{(1 + a^2) s_x(f)} \right] \\
 &= (1 + a^2) s_x(f) \left[ 1 + \frac{s_n(f)}{(1 + a^2) s_x(f)} \right] \left\{ 1 + \gamma \left[ 1 + \frac{s_n(f)}{(1 + a^2) s_x(f)} \right]^{-1} \cos(2\pi fT) \right\} \\
 &= (1 + a^2) s_x(f) \left[ 1 + \frac{s_n(f)}{(1 + a^2) s_x(f)} \right] [1 + \gamma B(f) \cos(2\pi fT)] \\
 \text{avec } B(f) &= \left[ 1 + \frac{s_n(f)}{(1 + a^2) s_x(f)} \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

On en conclut

$$\ln [s_z(f)] = \ln [(1 + a^2) s_x(f)] + A(f) + \ln [1 + \gamma B(f) \cos(2\pi fT)],$$

où  $\gamma = \frac{2a}{a^2+1}$ ,  $A(f)$  est le bruit additif défini par

$$A(f) = \ln \left[ 1 + \frac{s_n(f)}{(1 + a^2) s_x(f)} \right],$$

et  $B(f)$  est un bruit multiplicatif défini ci-dessus.

- R** L'effet de ces bruits sur l'estimation du retard  $T$  a fait l'objet de l'article ci-dessous - Joseph C. Hassab and Ronald Boucher, "A Probabilistic Analysis of Time Delay Extraction by the Cepstrum in Stationary Gaussian Noise," IEEE Trans. on Information Theory, Vol. 22, no 4, July 1976.

#### Exercice 4.25 — Variance d'Allan.

Soit  $x(t)$  un processus aléatoire stationnaire de moyenne  $E[x(t)] = 0$ , de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ .

1. On considère l'opération définie par

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(u) du$$

- Montrer que  $y(t) = F_T[x(t)]$ , où  $F_T$  est un filtre linéaire invariant dans le temps. Déterminer la réponse impulsionnelle  $h_T(t)$  et la transmittance  $H_T(f)$  de ce filtre  $F_T$ .
- Déterminer la densité spectrale de puissance du signal  $y(t)$  notée  $s_y(f)$  en fonction de  $s_x(f)$ . En déduire une expression intégrale permettant d'obtenir la fonction d'autocorrélation du signal  $y(t)$  notée  $R_y(\tau)$  en fonction de  $R_x(\tau)$ .

— Montrer que la puissance du signal  $y(t)$  s'écrit

$$P_y = \int s_x(f) \operatorname{sinc}^2(\pi f T) df \quad \text{avec} \quad \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

2. On considère le signal constant par morceaux défini par

$$D(t) = \frac{y[(k+1)T] - y[kT]}{\sqrt{2}} \quad \text{si } t \in [kT, (k+1)T[$$

— Déterminer la puissance du signal  $D(t)$  notée  $P_D(T)$  en fonction de  $R_y(0)$  et  $R_y(T)$  puis sous une forme intégrale dépendant de  $s_x(f)$ .

— En utilisant la parité de la densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ , en déduire

$$P_D(T) = 4 \int_0^\infty \frac{\sin^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2} s_x(f) df$$

La puissance  $P_D(T)$  est appelée variance d'Allan du signal  $x(t)$ .

3. On rappelle les relations suivantes

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^2} du = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^3} du = \log 2 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^4} du = \frac{\pi}{3}$$

Représenter graphiquement  $\log P_D(T)$  en fonction de  $\log T$  dans les cas suivants

— Bruit blanc :  $s_x(f) = K_0$

— Bruit de Flicker :  $s_x(f) = \frac{K_1}{f}$

— Marche aléatoire de fréquence :  $s_x(f) = \frac{K_2}{f^2}$

À votre avis, quel est l'intérêt de la variance d'Allan ? ■

*Correction.*

1. Il existe plusieurs méthodes permettant de montrer que

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(u) du$$

est une opération de filtrage linéaire. Nous adoptons ici la méthode temporelle :

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[t, t+T]}(u) x(u) du$$

Avec les notations habituelles, on a

$$\mathbb{1}_{[t, t+T]}(u) = \Pi_T \left( u - \left( t + \frac{T}{2} \right) \right)$$

En utilisant la parité de  $\Pi_T(\cdot)$ , on obtient

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T \left( t + \frac{T}{2} - u \right) x(u) du$$

d'où en posant  $h_T(t) = \frac{1}{T} \Pi_T \left( t + \frac{T}{2} \right)$ ,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_T(t-u) x(u) du.$$



On a donc montré que  $y(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée  $x(t)$  et de réponse impulsionnelle

$$h_T(t) = \frac{1}{T} \Pi_T \left( t + \frac{T}{2} \right).$$

La transmittance de ce filtre est

$$\begin{aligned} H_T(f) &= \frac{1}{T} e^{j\pi f T} TF [\pi_T(t)] \\ &= e^{j\pi f T} \text{sinc}(\pi f T) \end{aligned}$$

2. D'après les relations de Wiener-Lee, on a

$$s_y(f) = s_x(f) |H_T(f)|^2$$

d'où

$$s_y(f) = s_x(f) \text{sinc}^2(\pi f T).$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * TF^{-1} [\text{sinc}^2(\pi f T)] = R_x(\tau) * \frac{1}{T} \Lambda_T(\tau)$$

d'où

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(s) \frac{1}{T} \Lambda_T(\tau - s) ds.$$

La puissance du signal  $y(t)$  est  $P_y = R_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_y(f) df$ . On a donc

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{s_x(f) \text{sinc}^2(\pi f T)}_{s_y(f)} df$$

3. La puissance du signal  $D(t)$  est

$$\begin{aligned} P_D(T) &= E [D^2(t)] = \frac{1}{2} E \left[ [y((k+1)T) - y(kT)]^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ E [y^2((k+1)T)] + E [y^2(kT)] - 2E [y(kT)y(k+1)T] \right] \end{aligned}$$

d'où

$$P_D(T) = \frac{1}{2} [R_y(0) + R_y(0) - 2R_y(T)]$$

ie.

$$P_D(T) = R_y(0) - R_y(T).$$

En utilisant le fait que  $R_y(\tau) = \mathbb{F}^{-1}(s_y(f)) = \int_{\mathbb{R}} s_y(f) e^{j2\pi f \tau} df$ , on obtient

$$\begin{aligned} P_D(T) &= \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{j2\pi f T}) s_y(f) df \\ P_D(T) &= \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{j2\pi f T}) \text{sinc}^2(\pi f T) s_x(f) df \end{aligned}$$

Mais  $1 - e^{j\pi fT} = e^{j\pi fT} (e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}) = -2je^{j\pi fT} \sin(\pi fT)$ , c'est à dire

$$\begin{aligned} 1 - e^{2j\pi fT} &= -2j \cos(\pi fT) \sin(\pi fT) - 2j (j \sin^2 \pi fT) \\ &= -j \sin(2\pi fT) + 2 \sin^2(\pi fT) \end{aligned}$$

d'où

$$P_D(T) = \int_{\mathbb{R}} -j \sin(2\pi fT) \sin^2(\pi fT) s_x(f) df + 2 \int_{\mathbb{R}} \sin^2(\pi fT) \sin^2(\pi fT) s_x(f) df .$$

le premier terme intégrale est nulle car la fonction est impaire. En utilisant la parité de  $s_x(f)$ , il vient

$$P_D(T) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi fT)}{\pi^2 f^2 T^2} s_x(f) df .$$

4. Pour un bruit blanc, on obtient

$$P_D(T) = \frac{k_0}{T},$$

soit

$$\log(P_D(T)) = \log(K_0) - \log(T)$$

On obtient donc une droite de pente  $-1$  en échelle logarithmique.

Pour le bruit de Ficker, on obtient

$$P_D(T) = 4K_1 \log(2),$$

soit

$$\log(P_D(T)) = \log(4K_1 \log(2))$$

qui est une droite de pente 0.

Enfin, pour le modèle de marche aléatoire, on obtient

$$\log P_D(T) = \log\left(\frac{4}{3} K_2 \pi^2\right) + \log T.$$

En représentant la variance d'Allan  $P_D(T)$  en échelle logarithmique et en identifiant la pente de la droite  $\log P_D(T) = a \log(T) + b$  (avec  $a = 0$ ,  $a = 1$  ou  $a = -1$ ), on peut identifier le type de bruit affectant in signal donné. Cette méthode est beaucoup utilisée pour identifier les bruits affectant les capteurs utilisés pour la navigation GPS. ■

## 5. Filtrage non linéaire

### Exercice 5.1 — Filtre quadrateur.

On considère le filtre non linéaire sans mémoire d'entrée  $X(t)$  et de sortie  $Y(t)$  défini par :

$$Y(t) = X^2(t)$$

On suppose que  $X(t)$  est un processus aléatoire, réel, Gaussien, stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation  $R_X(\tau)$ .

1. En utilisant le théorème de Price, donner une équation différentielle liant la fonction d'autocorrélation de  $Y(t)$ , notée  $R_Y(\tau)$ , et  $R_X(\tau)$ . En déduire une expression de  $R_Y(\tau)$  en fonction de  $R_X(\tau)$  à une constante additive près.
2. On rappelle le résultat suivant, valable pour une variable aléatoire  $Z$  gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  :

$$E[Z^{2n}] = (2n)!!\sigma^{2n} \text{ avec } (2n)!! = (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1$$

En déduire la constante additive intervenant dans la relation entre  $R_Y(\tau)$  et  $R_X(\tau)$ . ■

*Correction.*

1. On prend

$$X_1(t) = X(t)$$

$$Y_1(t) = X^2(t) = Y(t)$$

$$X_2(t) = X(t - \tau)$$

$$Y_2(t) = X^2(t - \tau) = Y(t - \tau)$$

En utilisant le théorème de Price on arrive alors à

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = 4R_X(\tau)$$

et donc

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + K$$

où  $K$  est une constante.

2.

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= 2R_X^2(0) + K = 2(\sigma^2)^2 + K \\ &= E[Y^2(t)] = (4)!!\sigma^4 = 3\sigma^4 \end{aligned}$$

D'où  $K = \sigma^4$  et donc

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + \sigma^4$$

### Exercice 5.2 — Détecteur quadratique.

Pour déceler la présence d'une porteuse micro-onde, on utilise une diode semiconductrice travaillant à très faible niveau, qui se comporte comme un détecteur quadratique. On peut modéliser ce système de détection par un filtre non linéaire sans mémoire, transformant un processus  $X(t)$  en un processus  $Y(t)$  tel que :

$$Y(t) = X^2(t)$$

1. Le processus réel  $X(t)$  est formé par la somme d'un signal  $S(t)$  stationnaire, centré et d'un bruit  $B(t)$  stationnaire, centré, gaussien, statistiquement indépendant du signal. Calculer la fonction d'autocorrélation de la sortie du filtre non linéaire  $R_Y(\tau)$  et montrer qu'elle peut s'écrire :

$$R_Y(\tau) = R_{S^2}(\tau) + R_{B^2}(\tau) + 4R_S(\tau)R_B(\tau) + 2R_S(0)R_B(0)$$

2. Dans le cas où le bruit est négligeable et le signal a une forme sinusoïdale avec une phase  $\theta$  aléatoire uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$  :

$$S(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

déterminer la densité spectrale  $S_Y(f)$  de la sortie du filtre. Quelle est la tension  $V_S$  détectée par la diode, correspondant à la composante continue de la sortie du filtre ?

3. Dans le cas où seul le bruit est présent et possède une densité spectrale de puissance de type passe-bande idéal, de largeur  $\Delta f$ , centrée autour de  $f_0$  :

$$s_B(f) = \frac{N_0}{2} \Pi_{\Delta f}(f - f_0) + \frac{N_0}{2} \Pi_{\Delta f}(f + f_0)$$

déterminer la densité spectrale  $s_Y(f)$  de la sortie du filtre. Quelle est la tension  $V_B$  détectée par la diode ?

4. Dans cette dernière question, le signal à l'entrée de la diode est constitué de la somme du signal sinusoïdal de la question 2 et du bruit de la question 3. On note le rapport signal à

bruit (en échelle linéaire) :

$$\gamma = \frac{P_S}{P_B}$$

Déterminer la densité spectrale  $s_Y(f)$  de la sortie du filtre. Quelle est la tension  $V_{S+B}$  détectée par la diode ? Exprimer

$$\Gamma = \frac{V_{S+B}}{V_S}$$

en fonction du rapport signal à bruit  $\gamma$ .

**R** On utilisera le théorème de Price pour déterminer  $K_Y(\tau)$ .

*Correction.*

1.

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y^*(t-\tau)] \\ &= E[(S(t)+B(t))^2(S(t-\tau)+B(t-\tau))^2] \\ &= R_{S^2}(\tau) + R_{B^2}(\tau) + 2R_S(0)R_B(0) + 4R_S(\tau)R_B(\tau) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= R_{S^2}(\tau) = E[S^2(t)S^2(t-\tau)] \\ &= E[A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) A^2 \cos^2(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{4} E[(1 + \cos(4\pi f_0 t + \theta))(1 + \cos(4\pi f_0(t-\tau) + \theta))] \\ &= \frac{A^4}{8} \cos(4\pi f_0 \tau) + \frac{A^4}{4} \end{aligned}$$

Par transformée de Fourier on obtient donc :

$$s_Y(f) = \frac{A^4}{4} \delta(f) + \frac{A^4}{16} (\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0))$$

Et

$$V_S = \frac{A^4}{4}$$

3.

$$R_Y(\tau) = R_{B^2}(\tau) = E[B^2(t)B^2(t-\tau)] = ???$$

On va utiliser le théorème de Price avec  $Y(t) = B^2(t)$  et  $Y(t-\tau) = B^2(t-\tau)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[Y(t)Y(t-\tau)]}{\partial E[B(t)B(t-\tau)]} &= \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_B(\tau)} = E \left[ \frac{\partial Y(t)}{\partial B(t)} \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial B(t-\tau)} \right] \\ &= E[2B(t)2B(t-\tau)] = 4R_B(\tau) \end{aligned}$$

D'où

$$\partial R_Y(\tau) = 4R_b(\tau)\partial R_B(\tau)$$

Et donc :

$$R_Y(\tau) = 2R_B^2(\tau) + K$$

Calcul de  $K$  :

$$R_Y(0) = E[Y^2(t)] = E[B^4(t)] = 3\sigma^4 = 3R_B^2(0) = 2R_B^2(0) + K$$

D'où  $K = R_B^2(0)$  et donc :

$$R_Y(\tau) = 2R_B^2(\tau) + R_B^2(0)$$

Par transformée de Fourier, on obtient :

$$s_Y(f) = 2s_B(f) * s_B(f) + R_B^2(0)\delta(f)$$

D'où

$$V_B = R_B^2(0) = \left( \int_{\mathbb{R}} s_B(f) df \right)^2 = (N_0 \Delta f)^2$$

4. A finir

### Exercice 5.3 — Opérateur Signe.

Déterminer la fonction d'autocorrélation de la sortie  $Y(t)$  d'un opérateur "signe" dans le cas d'une entrée  $X(t)$  stationnaire, centrée et gaussienne, de fonction d'autocorrélation  $K_X(\tau)$  supposée connue :

$$Y(t) = \text{sign}(X(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } X(t) < 0 \end{cases}$$

*Correction.* this is the correction

### Exercice 5.4 — Filtre exponentiel.

On considère un filtre non linéaire de type exponentiel. Si  $X(t)$  est l'entrée du filtre, la sortie  $Y(t)$  s'écrit :

$$Y(t) = \exp(X(t))$$

L'entrée du filtre est un bruit gaussien, réel, centré, de variance  $\sigma^2$ .

1. Calculez la moyenne du signal en sortie du filtre.
2. Calculez la variance du signal en sortie du filtre.
3. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal en sortie du filtre en fonction de celle du signal à l'entrée.

**R** Si la variable aléatoire  $Z$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  et  $u$  est une constante alors on a :

$$E[e^{uZ}] = \exp\left(mu + \frac{\sigma^2}{2}u^2\right)$$

*Correction.*

$$1. m_Y = E[Y(t)] = E[e^{X(t)}] = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$2. \text{Var}_Y = E[(Y(t) - m_Y)^2] = E[Y^2(t)] - m_Y^2 = E[e^{2X(t)}] - e^{\sigma^2} = e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}$$

3. En utilisant le théorème de Price, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)} \right] \\ &= E \left[ e^{X(t)} e^{X(t-\tau)} \right] \\ &= E[Y(t)Y(t-\tau)] \\ &= R_Y(\tau). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{R_Y(\tau)} = \partial R_X(\tau)$$

soit

$$\ln [|R_Y(\tau)|] = R_X(\tau) + \text{constante}$$

et en conséquence

$$R_Y(\tau) = C \exp[R_X(\tau)]$$

Pour déterminer la constante multiplicative  $C$ , il suffit comme d'habitude de faire  $\tau = 0$  dans la relation ci-dessus. On a alors

$$C = \frac{R_Y(0)}{\exp[R_X(0)]} = \frac{R_Y(0)}{\exp(\sigma^2)}.$$

Mais

$$R_Y(0) = E[Y^{-2}(t)] = E[e^{2X(t)}].$$

En utilisant le rappel, puisque  $X(t)$  est un processus aléatoire gaussien, on en déduit

$$R_Y(0) = \exp(2\sigma^2)$$

D'où

$$C = \exp(\sigma^2).$$

La fonction d'autocorrélation du signal  $X(t)$  est donc

$$R_Y(\tau) = \exp[\sigma^2 + R_X(\tau)].$$

### Exercice 5.5 — Un terme linéaire et un terme quadratique.

On considère un signal aléatoire gaussien stationnaire  $X(t)$  de moyenne nulle, de puissance  $E[X^2(t)] = \sigma^2$  et de fonction d'autocorrélation  $R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$ . Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal  $Y(t) = aX(t) + bX^2(t)$  (où  $a$  et  $b$  sont deux constantes) en fonction

de  $R_X(\tau)$  et d'une constante additive notée  $C$ . Déterminer ensuite la constante  $C$ . ■

*Correction.*

En utilisant le théorème de Price, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)} \right] \\ &= E \{ [a + 2bX(t)] [a + 2bX(t-\tau)] \} \\ &= a^2 + 4b^2 R_X(\tau) \end{aligned}$$

On en déduit

$$R_Y(\tau) = a^2 R_X(\tau) + 2b^2 R_X^2(\tau) + C$$

Pour déterminer la constante  $C$ , il suffit comme d'habitude de faire  $\tau = 0$  dans la relation ci-dessus.

On a alors

$$C = R_Y(0) - a^2 R_X(0) - 2b^2 R_X^2(0).$$

Mais

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= E [Y^2(t)] \\ &= E [a^2 X^2(t) + 2abX^3(t) + b^2 X^4(t)] \\ &= a^2 \sigma^2 + b^2 (3\sigma^4). \end{aligned}$$

D'où

$$C = b^2 \sigma^4.$$

La fonction d'autocorrélation du signal  $X(t)$  est donc

$$R_Y(\tau) = a^2 R_X(\tau) + 2b^2 R_X^2(\tau) + b^2 \sigma^4. \quad \blacksquare$$

### Exercice 5.6 — Non-linéarité cubique.

On considère un signal aléatoire réel  $x(t)$  gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ . On forme le signal  $y(t) = x^3(t)$ .

1. Justifier que le signal  $y(t)$  est un signal stationnaire. De quoi dépend sa fonction d'autocorrélation  $R_y(\tau)$ ?
2. On rappelle que la fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours) est

$$R_{x^2}(\tau) = 2R_x^2(\tau) + R_x^2(0).$$

Déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal  $y(t)$  notée  $R_y(\tau)$  en fonction de  $R_x(\tau)$  et d'une constante additive  $C$ .

3. On rappelle que pour une variable aléatoire  $Z$  de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$E [Z^{2n}] = [(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] \sigma^{2n}.$$

En déduire la valeur de la constante  $C$ . ■



*Correction.*

1. Nous avons vu en cours qu'un signal défini par une transformation non linéaire sans mémoire d'un signal aléatoire stationnaire reste stationnaire.  $R_y(\tau)$  dépend uniquement de  $R_x(\tau)$  et de  $R_x(0)$ .
2. L'application du théorème de Price conduit à

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)} \right] = E [3x^2(t) \times 3x^2(t-\tau)] = 9R_{x^2}(\tau).$$

En utilisant l'indication, on obtient

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = 18R_x^2(\tau) + 9R_x^2(0).$$

En intégrant cette équation, on peut déterminer la fonction d'autocorrélation de  $y(t)$

$$R_y(\tau) = 6R_x^3(\tau) + 9R_x^2(0)R_x(\tau) + C.$$

3. Pour trouver  $C$ , on fait  $\tau = 0$ , d'où

$$C = R_y(0) - 6R_x^3(0) - 9R_x^2(0) = E[y^6(0)] - 15R_x^3(0).$$

En utilisant l'indication, on obtient

$$C = 15R_x^3(0) - 15R_x^3(0) = 0.$$

■

### Exercice 5.7 — Une non-linéarité très étrange.

On considère un signal aléatoire réel  $x(t)$  gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ . On forme le signal  $y(t) = \beta \alpha^{x(t)} = \beta \exp[x(t) \ln(\alpha)]$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ .

1) À l'aide du théorème de Price, déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal  $y(t)$  notée  $R_y(\tau)$  en fonction de  $R_x(\tau)$  et d'une constante multiplicative notée  $K$ .

2) On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire  $Z$  de loi gaussienne  $N(m, \sigma^2)$  est :

$$E[e^{Zu}] = \exp\left(mu + \frac{\sigma^2}{2}u^2\right), \forall u \in \mathbb{R}.$$

En déduire la constante  $K$ .



Cet exercice est inspiré de l'exercice 4.11 de la page 254 du livre de J. Yang et C. Liu intitulé "Random Signal Analysis" publié chez l'éditeur Gruyter en 2018.

■

*Correction.*

1. D'après le théorème de Price, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)} \right] \\ &= E [\ln(\alpha)y(t) \times \ln(\alpha)y(t-\tau)] \\ &= [\ln(\alpha)]^2 R_y(\tau).\end{aligned}\tag{5.1}$$

On en déduit

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{R_y(\tau)} = [\ln(\alpha)]^2 \partial R_x(\tau).$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$\ln |R_y(\tau)| = [\ln(\alpha)]^2 R_x(\tau) + C,$$

soit

$$R_y(\tau) = K \exp \{ [\ln(\alpha)]^2 R_x(\tau) \}.$$

2. Pour trouver  $K$ , on fait  $\tau = 0$  dans l'expression de  $R_y(\tau)$  et on obtient

$$R_y(0) = K \exp \{ [\ln(\alpha)]^2 R_x(0) \} \Leftrightarrow K = \frac{R_y(0)}{\exp \{ [\ln(\alpha)]^2 R_x(0) \}}.$$

Mais

$$\begin{aligned}R_y(0) &= E[y^2(t)] \\ &= E [\beta^2 \exp(2\ln(\alpha)x(t))] \\ &= \beta^2 E[e^{ux(t)}]\end{aligned}\tag{5.2}$$

avec  $u = 2\ln(\alpha)$ . Comme  $x(t)$  est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance  $E[x^2(t)] = R_x(0)$ , on a

$$R_y(0) = \beta^2 \exp \left\{ \frac{1}{2} \times [2\ln(\alpha)]^2 \times R_x(0) \right\} = \beta^2 \exp [2\ln^2(\alpha)R_x(0)],$$

d'où

$$K = \frac{R_y(0)}{\exp \{ [\ln(\alpha)]^2 R_x(0) \}} = \beta^2 \exp \{ [\ln(\alpha)]^2 R_x(0) \}.$$

On en déduit

$$R_y(0) = \beta^2 \exp \{ [\ln(\alpha)]^2 [R_x(0) + R_x(\tau)] \}.$$

■

### Exercice 5.8 — Klystron.

Un amplificateur Klystron peut être caractérisé par la relation (non-linéaire) entrée-sortie suivante

$$Y(t) = X(t) - kX^3(t)$$

1) On suppose dans un premier temps que le signal d'entrée  $X(t)$  est déterministe et défini par

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

où  $A$  et  $f_0$  sont deux constantes. En utilisant la relation classique  $\cos^3(x) = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos x$ ,

montrer qu'il existe une valeur de  $k$  que l'on exprimera en fonction de  $A$  telle que le spectre du signal de sortie  $Y(t)$  ne contienne pas de raie à la fréquence  $f_0$ . Pour cette valeur de  $k$ , quelle est la puissance et la densité spectrale de puissance du signal de sortie de l'amplificateur Klystron ?  
 2) On suppose désormais que l'entrée de l'amplificateur Klystron est un signal stationnaire Gaussien de moyenne nulle et de variance  $E[X^2(t)] = \sigma^2$ . Déterminer la fonction d'autocorrélation de  $Y(t)$  en fonction de celle de  $X(t)$  notée  $R_X(\tau)$ , de  $k$ ,  $\sigma^2$  et d'une constante additive  $C$ . On rappelle que les moments d'un signal Gaussien de moyenne nulle  $X(t)$  vérifient la relation suivante

$$m_{2n} = E[X^{2n}(t)] = [(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] \sigma^{2n}$$

En déduire la valeur de  $C$ . ■

**R** On pourra utiliser l'expression de fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours et TD)

$$E[X^2(t)X^2(t-\tau)] = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

*Correction.*

1. Dans le cas où  $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ , la sortie de l'amplificateur Klystron est définie par

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(t) - kX^3(t) \\ &= A \cos(2\pi f_0 t) - kA^3 \cos^3(2\pi f_0 t) \\ &= A \cos(2\pi f_0 t) - kA^3 \left[ \frac{1}{4} \cos(6\pi f_0 t) + \frac{3}{4} \cos(2\pi f_0 t) \right] \\ &= A \left( 1 - \frac{3kA^2}{4} \right) \cos(2\pi f_0 t) - \frac{kA^3}{4} \cos(6\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Pour que le spectre du signal de sortie  $Y(t)$  ne contienne pas la fréquence du signal d'entrée  $f_0$ , il faut annuler le premier terme, c'est-à-dire choisir  $k$  tel que

$$1 - \frac{3kA^2}{4} = 0 \iff k = \frac{4}{3A^2}$$

On a alors

$$Y(t) = -\frac{A}{3} \cos(6\pi f_0 t)$$

qui est un signal de puissance  $P_Y = \frac{A^2}{18}$  tel que

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{A^2}{18} \cos(6\pi f_0 \tau) \\ s_Y(f) &= \frac{A^2}{36} [\delta(f-3f_0) + \delta(f+3f_0)] \end{aligned}$$

2. En appliquant le théorème de Price, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E[(1-3kX^2(t))(1-3kX^2(t-\tau))] \\ &= 1 - 6k\sigma^2 + 9k^2 E[X^2(t)X^2(t-\tau)] \end{aligned}$$

On a vu en cours que la fonction d'autocorrélation du quadrateur était donnée par

$$\begin{aligned} E[X^2(t)X^2(t-\tau)] &= 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0) \\ &= 2R_X^2(\tau) + \sigma^4 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= 1 - 6k\sigma^2 + 9k^2\sigma^4 + 18k^2R_X^2(\tau) \\ &= (1 - 3k\sigma^2)^2 + 18k^2R_X^2(\tau)\end{aligned}$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$R_Y(\tau) = (1 - 3k\sigma^2)^2 R_X(\tau) + 6k^2 R_X^3(\tau) + C$$

où  $C$  est une constante additive. Pour déterminer la constante additive  $C$ , on fait  $\tau = 0$  dans l'expression précédente et on obtient

$$C = R_Y(0) - (1 - 3k\sigma^2)^2 R_X(0) - 6k^2 R_X^3(0)$$

Mais

$$\begin{aligned}R_Y(0) &= E[Y^2(t)] \\ &= E[X^2(t)] - 2kE[X^4(t)] + k^2E[X^6(t)] \\ &= \sigma^2 - 2km_4 + k^2m_6\end{aligned}$$

En utilisant

$$m_{2n} = E[X^{2n}(t)] = [(2n-1)(2n-3)\dots 5 \times 3 \times 1] \sigma^{2n}$$

on obtient

$$R_Y(0) = \sigma^2 - 6k\sigma^4 + 15k^2\sigma^6$$

d'où

$$C = \sigma^2 - 6k\sigma^4 + 15k^2\sigma^6 - (1 - 6k\sigma^2 + 9k^2\sigma^4) \sigma^2 - 6k^2\sigma^6 = 0$$

■

### Exercice 5.9 — Ecrêtage doux.

On considère une non-linéarité modélisant une distorsion de type à “écrêtage”

$$g(x) = \frac{1}{2K} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_d}\right) \quad \text{avec} \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

On l'applique à un processus gaussien réel  $X(t)$  stationnaire de moyenne nulle

$$Y(t) = g[X(t)].$$

On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple  $(U, V) = (X(t), X(t - \tau))$  est gaussienne de densité de probabilité

$$f_{\Sigma}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u, v)\Sigma^{-1}(u, v)^T\right]$$

où  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  et où  $\Sigma$  est la matrice de covariance du couple  $(U, V)$  définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(U) & \operatorname{cov}(U, V) \\ \operatorname{cov}(U, V) & \operatorname{var}(V) \end{pmatrix}$$

1) Exprimer les éléments de  $\Sigma$  en fonction de  $R_X(\tau)$  et  $R_X(0)$ . En déduire que la fonction d'autocorrélation du signal  $Y(t)$  ne dépend que de  $R_X(\tau)$  et  $R_X(0)$ .

2) On admet que pour un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation  $R_X(\tau)$ , on a

$$E \left\{ \exp \left[ -\frac{X^2(t) + X^2(t-\tau)}{2\sigma_d^2} \right] \right\} = \frac{\sigma_d^2}{\sqrt{(\sigma_d^2 + R_X(0))^2 - R_X^2(\tau)}}$$

et on rappelle la primitive suivante


$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin \left( \frac{u}{|a|} \right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $g'(x) = \frac{1}{K\sigma_d\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_d^2}\right)$ . En déduire  $R_Y(\tau)$  en fonction de  $R_X(\tau)$  à une constante additive près notée  $C$  qu'on supposera nulle.

3) Montrer que la fonction autocorrélation normalisée du signal  $Y(t)$  notée  $\rho_Y(\tau)$  vérifie

$$\rho_Y(\tau) = \frac{R_Y(\tau)}{R_Y(0)} = \frac{\arcsin\left(\frac{\rho_X(\tau)}{1+\alpha}\right)}{\arcsin\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}$$

avec  $\alpha = \frac{\sigma_d^2}{R_X(0)}$  et  $\rho_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$ .

 Ce résultat est issu l'article de R. F. Baum intitulé "The Correlation Function of Smoothly Limited Gaussian Noise" publié dans la revue IRE Transactions on Information Theory en septembre 1957 (vol. 3, no. 3).

*Correction.*

1. Cette question est très classique et a été vue en cours :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}.$$

De plus

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y^*(t-\tau)] \\ &= E\{g[X(t)]g^*[X(t-\tau)]\} \\ &= \int \int g(u)g^*(v)f_{\Sigma}(u,v)dudv. \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation du signal  $Y(t)$  ne dépend donc que des éléments de  $\Sigma$ , c'est-à-dire de  $R_X(\tau)$  et de  $R_X(0)$ .

2. La dérivée de  $g$  se calcule facilement comme suit (dérivée d'une fonction composée)

$$g'(x) = \frac{1}{2K} \times \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_d} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_d^2}\right) = \frac{1}{K\sigma_d\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_d^2}\right).$$

D'après le théorème de Price

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi K^2 \sigma_d^2} E \left\{ \exp \left[ -\frac{X^2(t)}{2\sigma_d^2} \right] \exp \left[ -\frac{X^2(t-\tau)}{2\sigma_d^2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi K^2 \sigma_d^2} E \left\{ \exp \left[ -\frac{X^2(t) + X^2(t-\tau)}{2\sigma_d^2} \right] \right\}.\end{aligned}$$

En utilisant le rappel, on obtient

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = \frac{1}{2\pi K^2} \frac{1}{\sqrt{(\sigma_d^2 + R_X(0))^2 - R_X^2(\tau)}}.$$

Par intégration, on obtient

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi K^2} \text{Arcsin} \left( \frac{R_X(\tau)}{\sigma_d^2 + R_X(0)} \right) + C.$$

On admettait dans l'examen que  $C = 0$ . Pour le démontrer, on peut faire un passage à la limite quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ . On a alors

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} E[Y(t)Y(t-\tau)] = E^2[Y(t)].$$

On a donc

$$C = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [R_Y(\tau) - R_Y^2(\tau)] = E^2[Y(t)].$$

Comme la fonction  $g$  est impaire, on a

$$E\{g[X(t)]\} = \int g(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = 0.$$

d'où  $C = 0$ .

3. On a

$$R_Y(0) = \frac{1}{2\pi K^2} \text{Arcsin} \left( \frac{R_X(0)}{\sigma_d^2 + R_X(0)} \right).$$

Donc

$$\rho_Y(\tau) = \frac{R_Y(\tau)}{R_Y(0)} = \frac{\frac{1}{2\pi K^2} \text{Arcsin} \left( \frac{R_X(\tau)}{\sigma_d^2 + R_X(0)} \right)}{\frac{1}{2\pi K^2} \text{Arcsin} \left( \frac{R_X(0)}{\sigma_d^2 + R_X(0)} \right)} = \frac{\arcsin \left( \frac{\rho_X(\tau)}{1+\alpha} \right)}{\arcsin \left( \frac{1}{1+\alpha} \right)}$$

avec  $\alpha = \frac{\sigma_d^2}{R_X(0)}$  et  $\rho_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$ .

■

## 6. Processus aléatoires

**Exercice 6.1 — Processus de Poisson.** On considère une suite d'instants aléatoires  $\{t_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  constituant un processus de Poisson (homogène) de paramètre  $\lambda$ . On appelle  $N(t, \tau)$  le nombre d'instants appartenant à l'intervalle  $[t, t + \tau[$ . Que représente le paramètre  $\lambda$  ?

- Déterminer la probabilité d'avoir  $N(t, \tau) = 0$ .
- Déterminer la probabilité d'avoir  $N(t, \tau)$  pair

*Correction.*

- $\lambda$  est le nombre moyen d'instants dans un intervalle de largeur  $\tau = 1$  puisque

$$E[N(t, \tau)] = \lambda |\tau| \implies \lambda = E[N(t, \tau = 1)]$$

- Puisque  $N(t, \tau)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda |\tau|$ , on a

$$P[N(t, \tau) = 0] = \frac{(\lambda |\tau|)^0}{0!} \exp(-\lambda |\tau|) = \exp(-\lambda |\tau|)$$

- Puisque  $N(t, \tau)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda |\tau|$ , on a

$$\begin{aligned} P[N(t, \tau) \text{ pair}] &= P[N(t, \tau) = 0 \text{ ou } N(t, \tau) = 2 \text{ ou } N(t, \tau) = 4 \text{ ou } \dots] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N(t, \tau) = 2k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda |\tau|]^{2k}}{(2k)!} \exp[-\lambda |\tau|] \\ &= \exp[-\lambda |\tau|] \operatorname{ch}(-\lambda |\tau|) \\ &= \exp[-\lambda |\tau|] \frac{\exp[-\lambda |\tau|] + \exp[\lambda |\tau|]}{2} \\ &= \frac{1}{2} [1 + \exp(-2\lambda |\tau|)] \end{aligned}$$

**Exercice 6.2 — Shot Noise.** On considère un processus de Poisson homogène de paramètre  $\lambda$  noté  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  et le signal aléatoire  $X(t)$  défini par

$$X(t) = \sum_i h(t - t_i) \text{ avec } h(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle que la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  est définie par

$$P[Y = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{N} \text{ avec } E[Y] = \lambda.$$

1. Rappeler le rôle du paramètre  $\lambda$  dans un processus de Poisson.
2. Représenter graphiquement une réalisation du signal aléatoire  $X(t)$ .
3. On suppose que le signal

$$Z(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$$

(où  $\delta(\cdot)$  est la distribution de Dirac) est un signal aléatoire stationnaire de moyenne  $E[Z(t)] = \lambda$  et de fonction d'autocorrélation  $E[Z(t)Z(t - \tau)] = \lambda^2 + \lambda \delta(\tau)$ .

- Déterminer la densité spectrale de puissance du signal  $X(t)$  puis sa fonction d'autocorrélation.
  - Déterminer la moyenne et la variance du signal  $X(t)$ .
4. Chaque impulsion  $h(t - t_i)$  est maintenant affectée par une amplitude  $c_i$  supposée aléatoire de moyenne  $E[c_i^2] = \mu_c$  et de variance  $\text{var}[c_i] = E[c_i^2] - E^2[c_i] = \sigma_c^2$ , ce qui conduit à définir le signal

$$X_c(t) = \sum_i c_i h(t - t_i).$$

On suppose que les amplitudes  $c_i$  et  $c_j$  (avec  $i \neq j$ ) sont des variables aléatoires indépendantes. On suppose également que les amplitudes  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  sont indépendantes des instants de Poisson  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ .

- Déterminer la moyenne du signal  $X_c(t)$ .
- Montrer que la variance du signal  $X_c(t)$  est donnée par l'expression suivante

$$\text{var}[X_c(t)] = (\mu_c^2 + \sigma_c^2) \lambda T.$$

*Correction.*

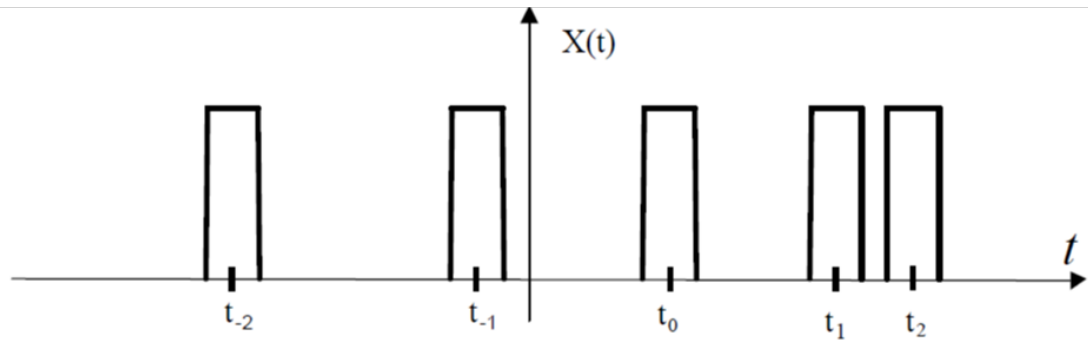
1. Une des propriétés d'un processus de Poisson est le fait que le nombre d'instant  $t_i$  situés dans un intervalle de largeur  $\tau$ , par exemple  $[t, t + \tau[$  noté  $N(t, \tau)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda|\tau|$ . Donc, pour un intervalle de largeur unité, c'est-à-dire tel que  $|\tau| = 1$ , on a

$$E[N(t, \tau)] = \lambda.$$

Le paramètre  $\lambda$  représente donc le moyen d'instant dans un intervalle de largeur unité.

2. Une réalisation du signal aléatoire  $X(t)$  est représentée ci-dessous





3. Le signal  $X(t)$  est clairement obtenu par filtrage linéaire de  $Z(t)$  par un filtre de réponse impulsionnelle  $h(t)$ . En effet,

$$Z(t) * h(t) = \sum_i \delta(t - t_i) * h(t) = X(t)$$

- La densité spectrale de puissance du signal  $X(t)$  peut donc s'obtenir à l'aide de la relation de Wiener-Lee

$$\begin{aligned} s_X(f) &= s_Z(f) |H(f)|^2 \\ &= TF [\lambda^2 + \lambda \delta(\tau)] T^2 \sin^2(\pi T f) \\ &= [\lambda^2 \delta(f) + \lambda] T^2 \sin^2(\pi T f) \\ &= (\lambda^2 T^2) \delta(f) + \lambda T^2 \sin^2(\pi T f) \end{aligned}$$

On en déduit la fonction d'autocorrélation du signal  $X(t)$

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= TF^{-1} [s_X(f)] \\ &= \lambda^2 T^2 + \lambda T \Lambda_T(\tau) \end{aligned}$$

- La moyenne du signal  $X(t)$  se détermine comme suit

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[Z(t) * h(t)] \\ &= E \left[ \int h(u) Z(t-u) du \right] \\ &= \int h(u) E[Z(t-u)] du \\ &= \lambda \int h(u) du = \lambda T \end{aligned}$$

La variance de  $X(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \text{var}[X(t)] &= E[X^2(t)] - E^2[X(t)] \\ &= R_X(0) - \lambda^2 T^2 \\ &= \lambda T. \end{aligned}$$

4. — La moyenne du signal  $X_c(t)$  s'écrit

$$E[X_c(t)] = \sum_i E[c_i h(t - t_i)]$$

En utilisant l'indépendance entre les amplitudes  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  et les instants de Poisson  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , on en déduit

$$\begin{aligned} E[X_c(t)] &= \sum_i E[c_i] E[h(t-t_i)] \\ &= \sum_i \mu_c E[h(t-t_i)] \\ &= \mu_c E\left[\sum_i h(t-t_i)\right] \\ &= \mu_c E[X(t)] \\ &= \lambda T \mu_c. \end{aligned}$$

— Le calcul de la variance du signal  $X_c(t)$  est similaire à celui effectué pour la moyenne

$$\begin{aligned} E[X_c^2(t)] &= E\left[\sum_i c_i h(t-t_i) \sum_j c_j h(t-t_j)\right] \\ &= \sum_{i,j} E[c_i c_j h(t-t_i) h(t-t_j)] \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau l'indépendance entre les amplitudes  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  et les instants de Poisson  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , on obtient

$$\begin{aligned} E[X_c^2(t)] &= \sum_{i,j} E[c_i c_j] E[h(t-t_i) h(t-t_j)] \\ &= \sum_{i \neq j} \mu_c^2 E[h(t-t_i) h(t-t_j)] + \sum_{i=j} (\mu_c^2 + \sigma_c^2) E[h^2(t-t_i)] \\ &= \mu_c^2 E\left[\sum_i h(t-t_i) \sum_j h(t-t_j)\right] + \sigma_c^2 \sum_{i=j} E[h^2(t-t_i)] \\ &= \mu_c^2 E[X^2(t)] + \sigma_c^2 \sum_i E[h^2(t-t_i)] \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$h^2(t-t_i) = h(t-t_i)$$

on a

$$\begin{aligned} E[X_c^2(t)] &= \mu_c^2 (\lambda T + \lambda^2 T^2) + \sigma_c^2 \sum_i E[h(t-t_i)] \\ &= \mu_c^2 (\lambda T + \lambda^2 T^2) + \sigma_c^2 E[X(t)] \\ &= \mu_c^2 (\lambda T + \lambda^2 T^2) + \lambda T \sigma_c^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{var}[X_c(t)] &= E[X_c^2(t)] - E^2[X_c(t)] \\ &= \lambda T (\mu_c^2 + \sigma_c^2) \end{aligned}$$

■

**Exercice 6.3**  $\{t_j\}$  est un processus de Poisson stationnaire de paramètre  $\lambda$ . On suppose que  $t_j < t_{j+1}$  et  $t_{-1} < 0 < t_1$ . On rappelle que pour un tel processus

$$P[N(t, \tau) = k] = \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} e^{-\lambda|\tau|}$$

où  $N(t, \tau)$  est le nombre d'instants  $t_j$  situés dans l'intervalle  $[t, t + \tau[$ .

1.  $\{u_j\}$  est obtenu à partir du processus  $\{t_j\}$  en supprimant et en conservant chaque instant  $t_j$  avec les probabilités  $p$  et  $1 - p$ , les opérations successives de suppression ou de conservation étant indépendantes.  $\{u_j\}$  est-il un processus de Poisson ?
2.  $\{v_j\}$  est obtenu à partir du processus  $\{t_j\}$  en supprimant les instants  $t_j$  où  $j$  est impair.  $\{v_j\}$  est-il un processus de Poisson ?

*Correction.*

this is the correction

**Exercice 6.4 — Changement d'horloge.** Soit  $A(t)$  est un signal des télégraphistes sur  $\{-1, +1\}$  et  $Z(t)$  un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation  $K_Z(\tau)$ . On suppose de plus que  $A(t)$  et  $Z(t)$  sont deux processus indépendants.

1. Calculer les deux fonctions caractéristiques suivantes :

$$\psi(f) = E \left[ e^{2i\pi f A(t)} \right] \quad \varphi(\tau, f) = E \left[ e^{2i\pi f (-A(t) + A(t-\tau))} \right]$$

2. Soit  $V(t) = Z(t - A(t))$ . Calculer la moyenne et la fonction d'autocorrélation du processus  $V(t)$  en fonction du spectre de  $Z(t)$  et de  $\varphi(\tau, f)$ .
3. Déterminer la densité spectrale de puissance de  $V(t)$  lorsque  $S_Z(f) = U(f - f_0)$  où  $U(f)$  est l'échelon de Heavieside. A quelles conditions le spectre du processus  $V(t)$  est-il un spectre à densité ? un spectre de raies ?

*Correction.* this is the correction



## 7. Prédiction

**Exercice 7.1** Soit  $Z(t)$  un processus aléatoire stationnaire, de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation  $K_Z(\tau)$  et de densité spectrale  $s_Z(f)$  telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 s_Z(f) df < \infty$$

1. Soit  $Z'(t)$  la dérivée en moyenne quadratique de  $Z(t)$ . Calculer  $E[Z(t)Z'^*(t-\tau)]$  et  $E[Z'(t)Z'^*(t-\tau)]$ . Dans la suite, on suppose  $Z(t)$  réel.
2. Déterminer  $a$  et  $b$  de façon que  $U(t) = aZ(t) + bZ'(t)$  approche au mieux  $Z(t+\tau)$ . Calculer l'erreur d'approximation et vérifier qu'elle est nulle pour  $\tau = 0$ .
3. Soit

$$V_T(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} Z(u) du$$

Déterminer le filtre linéaire  $F_T$  tel que  $V_T = F_T(Z)$ . Déterminer  $E[V_T(t)]$ , le spectre de puissance et la fonction d'autocorrélation de  $V_T(t)$ . Quelle erreur commet-on lorsqu'on confond  $Z(t)$  et  $V_T(t)$  ?

*Correction.* this is the correction

**Exercice 7.2** Soit  $X(t)$  un processus aléatoire stationnaire, de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation  $K(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$  (on rappelle que la densité spectrale de puissance d'un tel processus est  $s(f) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 f^2}$ ).

1. Calculer  $a$  de façon à minimiser  $E[(X(t_0) - aX(0))^2]$  pour  $t_0 > 0$ .
2. Calculer  $E[X(u)(X(t_0) - aX(0))]$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ .
3.  $X(t)$  étant donné pour  $t \in \mathbb{R}^-$ , déterminer la meilleure prédiction linéaire  $\tilde{X}(u)$  de  $X(u)$

pour  $u > 0$  et calculer l'erreur de prédiction. ■

*Correction.* this is the correction ■

**Exercice 7.3** Soit  $X(t)$  un signal des télégraphistes d'intensité  $\lambda > 0$  ( $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ). On rappelle que pour un tel signal :

$$\begin{aligned} K_X(\tau) &= e^{-2\lambda|\tau|} & \forall \tau \in \mathbb{R} \\ s_X(f) &= \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 f^2} & \forall f \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On considère le filtre linéaire  $F$  de réponse impulsionnelle  $h(t)$  définie comme suit

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 & t < 0 \\ h(t) &= e^{-t} & t > 0 \end{aligned}$$

et le signal filtré  $Y(t) = F[X](t)$ .

1. Calculer la réponse fréquentielle (ou fonction de transfert) du filtre.
2. Déterminer la densité spectrale de puissance de  $Y(t)$ .
3. Montrer que

$$K_Y(\tau) = \frac{1}{1 - 4\lambda^2} \left[ e^{-2\lambda|\tau|} - 2\lambda e^{-|\tau|} \right] \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

4. Montrer que pour  $t > 0$ , l'estimateur linéaire  $\tilde{X}(t)$  de  $X(t)$  sur son passé  $\Delta = ]-\infty, 0]$  est donné par :

$$\tilde{X}(t) = X(0)e^{-2\lambda t}$$

5. Calculer l'erreur associée  $\sigma_t^2 = E \left[ \left( X(t) - \tilde{X}(t) \right)^2 \right]$  et commenter le résultat obtenu.
6. Soit  $t > 0$ . Montrer que l'on peut trouver des fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$  telles qu'en posant

$$\tilde{Y}(t) = a(t)Y'(0) + b(t)Y(0)$$

on ait :

$$E \left[ \left( \tilde{Y}(t) - Y(t) \right) Y(u) \right] = 0 \quad \forall u \leq 0$$

7. En déduire, en justifiant soigneusement la réponse, l'estimateur linéaire de  $Y(t)$  pour  $t > 0$  sur son passé  $\Delta = ]-\infty, 0]$ . ■

*Correction.* this is the correction ■







## **Deuxième partie**

# **Signaux et systèmes à temps discret**



# 1. Numérisation du signal

## 1.1 Rappels

Pour passer d'un signal analogique, défini à tout instant par des valeurs réelles, à un signal numérique, défini à des instants discrets par un nombre fini de valeurs, deux opérations sont nécessaires : une opération d'échantillonnage (discrétisation dans le domaine temporel) et une opération de quantification (discrétisation dans le domaine des amplitudes).

### — Echantillonnage (périodique)

Afin de conserver la même information dans le signal échantillonné et dans le signal à temps continu, la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  doit être choisie de manière à respecter la condition de Shannon suivante :

$$F_e > 2F_{max},$$

si  $F_{max}$  représente la fréquence maximale de la transformée de Fourier du signal à échantillonner.

Si la condition de Shannon est respectée, il est alors possible de reconstituer le signal analogique, à partir de la suite des échantillons prélevés, en utilisant un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c \in [F_{max} \ F_e - F_{max}]$ . En notant  $y(t)$  le signal reconstitué et  $Y(f)$  sa transformée de Fourier, nous avons :

$$Y(f) = H_{PB}(f)X_e(f)$$

si  $X_e(f)$  représente la transformée de Fourier du signal échantillonné  $x_e(t)$ . Et donc :

$$y(t) = h_{PB}(t) * x_e(t) = h_{PB}(t) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \delta(t - kT_e) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) h_{PB}(t - kT_e)$$

La reconstitution par filtrage est ainsi équivalente à une interpolation dans le domaine temporel.

— **Quantification (uniforme)**

Chaque valeur du signal sera approchée par un multiple entier d'une quantité élémentaire appelée pas de quantification. Le nombre de valeurs possibles, pour l'amplitude du signal après quantification, va être donné par le nombre de bits de quantification utilisés : avec  $nb$  bits on pourra coder  $2^{nb}$  niveaux sur la dynamique  $D$  du signal.

Dans le cas d'une quantification uniforme :

$$q = \frac{D}{2^{nb}}$$

L'opération de quantification est une opération irréversible mais, si elle est effectuée dans de bonnes conditions (pas d'écrêtage du signal, pas de quantification suffisamment fin), elle est équivalente à l'ajout d'un bruit sur le signal non quantifié de départ, avec un rapport signal à bruit de quantification qui s'écrit

$$SNR_Q(dB) = 6nb + \text{constante}$$

où la constante dépend du signal considéré.

## 1.2 Exercices

### Exercice 1.1 — Cosinus mal échantillonné.

On échantillonne le signal  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  avec  $f_0 = 5kHz$  à la fréquence d'échantillonnage  $F_e = 8kHz$ .

1. Déterminer la densité spectrale du signal échantillonné  $x_e(t)$  et la représenter graphiquement pour  $|f| < 12kHz$ .
2. Quel signal obtient-on si on filtre le signal  $x_e(t)$  précédent à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $F_c = 4kHz$ ? Même question si on filtre le signal  $x_e(t)$  à l'aide d'un filtre passe-bande idéal de bande passante  $[-6kHz, -4kHz] \cup [4kHz, 6kHz]$ .

*Correction.*

1. La transformée de Fourier du signal  $X(f)$  est

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

Le signal échantillonné s'écrit

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_e) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

D'où

$$X_e(f) = X(f) \left[ F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e) \right] = F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kF_e)$$

La périodisation d'ordre 0 est

$$\begin{aligned} X_0(f) &= F_e X(f) \\ &= \frac{F_e}{2} \delta(f - f_0) + \frac{F_e}{2} \delta(f + f_0) \\ &= \frac{F_e}{2} \delta(f - 5kHz) + \frac{F_e}{2} \delta(f + 5kHz) \end{aligned}$$

La périodisation d'ordre 1 est

$$\begin{aligned} X_1(f) &= F_e X(f - F_e) \\ &= \frac{F_e}{2} \delta(f - f_0 - F_e) + \frac{F_e}{2} \delta(f + f_0 - F_e) \\ &= \frac{F_e}{2} \delta(f - 13\text{kHz}) + \frac{F_e}{2} \delta(f - 3\text{kHz}) \end{aligned}$$

La périodisation d'ordre  $-1$  est

$$\begin{aligned} X_{-1}(f) &= F_e X(f + F_e) \\ &= \frac{F_e}{2} \delta(f - f_0 + F_e) + \frac{F_e}{2} \delta(f + f_0 + F_e) \\ &= \frac{F_e}{2} \delta(f + 3\text{kHz}) + \frac{F_e}{2} \delta(f + 13\text{kHz}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

(1.2)

2. Si on filtre le signal  $x_e(t)$  à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $F_c = 4\text{kHz}$ , on obtient donc un cosinus de fréquence  $f_r = 3\text{kHz}$ . Si on filtre le signal  $x_e(t)$  à l'aide d'un filtre passe-bande idéal de bande passante  $[-6\text{kHz}, -4\text{kHz}] \cup [4\text{kHz}, 6\text{kHz}]$ , on obtient un cosinus de fréquence  $f_r = 5\text{kHz}$ . ■

### Exercice 1.2 Effet de l'échantillonnage

Soit le signal suivant :  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $f_0 = 10\text{ kHz}$ .

1. Tracer la transformée de Fourier de  $x(t)$  :  $X(f)$ .
2. Est-il possible d'échantillonner  $x(t)$  sans perte d'information ? Si oui à quelle condition ?
3. Tracer, entre 0 et  $F_e$ , la transformée de Fourier de  $x(t)$  échantillonné à  $T_e = 1/F_e$  quand :
  - (a)  $F_e = 30\text{ kHz}$ .
  - (b)  $F_e = 8\text{ kHz}$ .
4. A partir des échantillons nous souhaitons reconstruire  $x(t)$  par filtrage passe-bas à  $F_e/2$ . Quels seront les signaux obtenus pour chaque fréquence d'échantillonnage précédente ? ■

*Correction.*

1. La transformée de Fourier de  $x(t)$ ,  $X(f)$ , est tracée sur la figure 1.1.

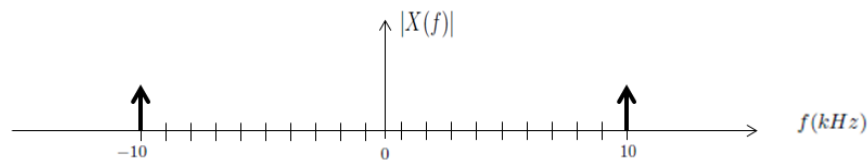


FIGURE 1.1 – Transformée de Fourier de  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $f_0 = 10\text{ kHz}$ .

2. Il est possible d'échantillonner  $x(t)$  sans perte d'information en utilisant une fréquence d'échantillonnage  $F_e > 2f_0 = 20\text{ kHz}$  (respect de la condition de Shannon).
3. La transformée de Fourier de  $x(t)$ , échantillonné à  $T_e = 1/F_e$ , est tracée entre 0 et  $F_e$  sur la figure 1.2 quand  $F_e = 30\text{ kHz}$  et sur la figure 1.3 quand  $F_e = 8\text{ kHz}$ .

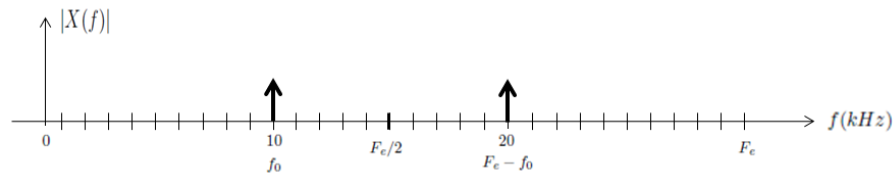


FIGURE 1.2 – Transformée de Fourier de  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $f_0 = 10$  kHz,  $F_e = 30$  kHz.

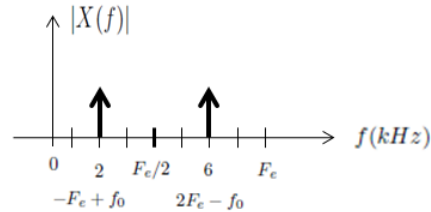


FIGURE 1.3 – Transformée de Fourier de  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $f_0 = 10$  kHz,  $F_e = 8$  kHz.

4. Par filtrage passe-bas à  $F_e/2$ , nous obtenons  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , avec  $f_0 = 10$  kHz pour  $F_e = 30$  kHz, et  $x(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ , avec  $f_1 = 2$  kHz pour  $F_e = 8$  kHz. ■

### Exercice 1.3 Signal à spectre non borné - Recherche de $F_e$

Soit le signal  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

- Déterminer la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal  $x(t)$ . Tracer  $|X(f)|$ .
- Le signal  $x(t)$  est-il échantillonnable sans perte d'information ? Expliquez votre réponse.
- En considérant la transformée de Fourier comme négligeable pour une atténuation minimale de 40 dB par rapport à sa valeur maximum, dimensionner la fréquence d'échantillonnage,  $F_e$ , à utiliser.
- Une fois  $F_e$  déterminée, quel traitement doit-on appliquer au signal avant de l'échantillonner ? ■

*Correction.*

1.

$$X(f) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

2. Non le signal n'est pas échantillonnable sans perte d'information car le spectre est non borné. On ne peut donc pas appliquer la condition de Shannon.
3. On a le maximum du spectre pour  $f = 0$ . On souhaite donc trouver  $F_{max}$  telle que :

$$10 \log_{10} |X(F_{max})|^2 \leq 10 \log_{10} |X(0)|^2 - 10 \log_{10} (10^4) = 10 \log_{10} \frac{|X(0)|^2}{10^4}$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 F_{max}^2}} \leq \frac{1}{10^4 a^2}$$

et donc

$$F_{max}^2 \geq \frac{(10^4 - 1) a^2}{4\pi^2}$$

Soit, en négligeant 1 devant  $10^4$  :

$$F_{max} \geq \frac{100a}{2\pi}$$

et donc

$$F_e \geq \frac{100a}{\pi}$$

4. Un filtre anti repliement doit être appliqué au signal avant de l'échantillonner afin de tronquer le spectre du signal à  $F_{max}$  et éviter ainsi les repliements. ■

#### Exercice 1.4 — Echantillonneur moyenneur.

L'échantillonneur moyenneur est une méthode pratique d'échantillonnage qui consiste à calculer, toutes les  $T_e$  secondes (période d'échantillonnage), la valeur moyenne du signal pendant un intervalle de temps  $\theta$  ( $\theta \ll T_e$ ) et à affecter cette valeur moyenne à l'échantillon discrétisé :

$$y(kT_e) = \frac{1}{\theta} \int_{kT_e - \theta}^{kT_e} x(u) du$$

$$x_{ech}(t) = \sum_k y(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

1. Démontrer que le signal échantillonné  $x_{ech}(t)$  peut se mettre sous la forme :

$$x_{ech}(t) = \frac{1}{\theta} \left[ \Pi_{\theta}(t) * x \left( t - \frac{\theta}{2} \right) \right]_T(t)$$

où  $\Pi_{\theta}(t)$  et  $\delta_T(t)$  représentent respectivement la fenêtre rectangulaire de largeur  $\theta$  et le peigne de Dirac de période  $T$ .

2. En déduire la transformée de Fourier correspondante  $X_{ech}(f)$ .
3. En considérant un signal à support spectral borné  $2\Delta f$  et en prenant en compte que la fonction  $\text{sinc}(\pi\theta f)$  peut être supposé constante sur l'intervalle  $\left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$

$$\text{sinc}(\pi\theta f) = \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} \approx 1 \text{ pour } f \in \left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$$

quelle(s) condition(s) doit vérifier  $\theta$  pour que le signal  $x(t)$  puisse être restitué par filtrage de  $x_{ech}(t)$  ?

Dans ces conditions peut-on échantillonner à la fréquence de Shannon ?

*Correction.*

1.

$$x_{ech}(t) = \sum_k y(kT_e) \delta(t - kT_e) = y(t) \sum_k \delta(t - kT_e) = y(t) \cdot \text{II}_{T_e}(t)$$

Reste à montrer que

$$y(t) = \frac{1}{\theta} \left[ \Pi_{\theta}(t) * x \left( t - \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^t x(u) du \\ &= \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \times \Pi_{\theta} \left( u - \left( t - \frac{\theta}{2} \right) \right) du \\ &= \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \times \Pi_{\theta} \left( \left( t - \frac{\theta}{2} \right) - u \right) du \\ &= \frac{1}{\theta} (x * \Pi_{\theta}) \left( t - \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

2.

$$X_{ech}(f) = Y(f) * \frac{1}{T_e} \text{II}_{1/T_e}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_k Y \left( f - \frac{k}{T_e} \right)$$

avec

$$Y(f) = \text{sinc}(\pi f \theta) X(f) e^{-j\pi f \theta}$$

3. (a) Il faut que  $\Delta f \leq \frac{1}{3\theta} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{1}{3\Delta f}$   
 (b) Après filtrage antialiasing on pourra prendre  $F_e$  tel que

$$\Delta f < \frac{F_e}{2} = \frac{1}{2T_e} \Leftrightarrow T_e < \frac{1}{2\Delta f}$$

### Exercice 1.5 — Échantillonnage à porte analogique.

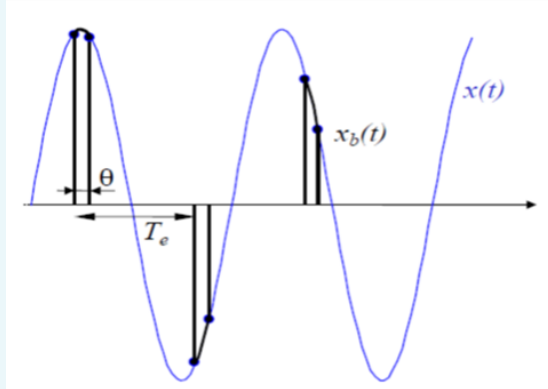
On considère un signal déterministe  $x(t)$  de transformée de Fourier à bande limitée  $[-F_{\max}, F_{\max}]$ .

1. Rappeler l'expression du signal  $x_e(t)$  obtenu par échantillonnage idéal de  $x(t)$  à la fréquence  $F_e$ . Déterminer la transformée de Fourier de  $x_e(t)$  notée  $X_e(f)$ . Représenter cette transformée de Fourier  $X_e(f)$  lorsque  $F_e > 2F_{\max}$  et

$$x(t) = F_{\max} \left[ \frac{\sin(\pi F_{\max} t)}{\pi F_{\max} t} \right]^2.$$

2. On considère désormais l'opération de blocage par produit représentée ci-dessous (le signal d'origine est en bleu et le signal bloqué par produit est en noir)





Exprimer le signal  $x_b(t)$  comme le produit de  $x(t)$  avec une somme de fonctions portes que l'on précisera. Exprimer cette somme de fonctions portes comme le produit de convolution entre un peigne de Diracs et une fonction que l'on précisera. En déduire une expression de la transformée de Fourier de  $x_b(t)$  notée  $X_b(f)$ . Expliquer comment retrouver la condition de Shannon à partir de  $X_b(f)$ . On suppose que la condition  $F_e > 2F_{\max}$  est vérifiée. Qu'obtient-on lorsqu'on filtre le signal  $x_b(t)$  par un filtre passe bas idéal de transmittance  $H(f) = \Pi_{F_e}(f)$  ?

*Correction.*

1. Le signal  $x_e(t)$  obtenu par échantillonnage idéal de  $x(t)$  à la fréquence  $F_e$  est défini par

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e).$$

La transformée de Fourier de  $x_e(t)$  s'écrit alors

$$X_e(f) = X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e) = F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kF_e)$$

Lorsque  $x(t) = F_{\max} \left[ \frac{\sin(\pi F_{\max} t)}{\pi F_{\max} t} \right]^2$ , on a

$$X(f) = \Lambda_{F_{\max}}(f),$$

d'où

$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_{F_{\max}}(f - kF_e)$$

2. Le signal bloqué s'écrit

$$x_b(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi_{\theta} \left( t - kT_c - \frac{\theta}{2} \right) = x(t) \left[ \Pi_{\theta} \left( t - \frac{\theta}{2} \right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) \right]$$

La transformée de Fourier de  $x_b(t)$  s'écrit alors

$$X_b(f) = X(f) * \left[ e^{-j\pi\theta f} \theta \operatorname{sinc}(\pi\theta f) F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_c) \right]$$

c'est-à-dire

$$X_b(f) = F_e \theta X(f) \cdot \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi\theta k F_e} \operatorname{sinc}(\pi\theta k F_e) \delta(f - k F_e) \right]$$

et finalement on obtient

$$X_b(f) = F_e \theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi\theta k F_e} \operatorname{sinc}(\pi\theta k F_e) X(f - k F_e).$$

Lorsqu'on filtre le signal  $x_b(t)$  par un filtre passe bas idéal de transmittance  $H(f) = \Pi_{F_c}(f)$ , on obtient le spectre d'ordre 0 correspondant à  $k = 0$ , c'est-à-dire

$$F_e \theta X(f).$$

On retrouve bien le spectre du signal d'intérêt. ■

### Exercice 1.6 — Échantillonnage d'un signal périodique.

On considère un signal déterministe périodique

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

où  $A$  est une amplitude réelle positive et  $f_0 = 5\text{kHz}$ . On échantillonne ce signal à la fréquence  $f_e = 1/T_e$  pour obtenir

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

1. Déterminer les transformées de Fourier des signaux  $x(t)$  et  $x_e(t)$  notées  $X(f)$  et  $X_e(f)$  et montrer que  $X_e(f)$  s'obtient par périodisation de  $X(f)$ .
2. Représenter graphiquement  $X_e(f)$  lorsque  $f_e = 100\text{kHz}$  et lorsque  $f_e = 8\text{kHz}$ .
3. On filtre le signal  $x_e(t)$  à l'aide d'un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure  $f_c = f_0/2$  pour obtenir le signal  $x_r(t) = x_e(t) * h(t)$  avec

$$H(f) = \text{TF}[h(t)] = \frac{1}{f_c} \Pi_{f_c}(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_c} & \text{si } -\frac{f_c}{2} \leq f \leq \frac{f_c}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En s'aidant des résultats de la question précédente, déterminer l'expression du signal  $x_r(t)$  dans les deux cas  $f_e = 100\text{kHz}$  et  $f_e = 8\text{kHz}$ . 4. Qu'appelle-t-on formule d'interpolation de Shannon ? ■

*Correction.*

1. La TF de  $x(t)$  est bien connue (voir tables)

$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

Celle de  $X_e(f)$  a été déterminée en cours

$$X_e(f) = \text{TF} \left[ x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \right] = X(f) * \left[ f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e) \right] = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e)$$

qui s'obtient bien par périodisation de  $X(f)$ .

- Il suffit de représenter des raies aux fréquences  $f_0 \pm kf_e$  et  $-f_0 \pm kf_e$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Dans le premier cas ( $f_e = 100\text{kHz}$ ), on respecte la condition de Shannon. Le signal restitué est donc

$$x_r(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

qui est le signal d'origine. Dans le second cas ( $f_e = 8\text{kHz}$ ), on ne respecte plus la condition de Shannon. En faisant un dessin, on observe qu'on obtient après filtrage deux raies aux fréquences  $f_r = 3\text{kHz}$  et  $-f_r = -3\text{kHz}$ , c'est-à-dire

$$x_r(t) = \cos(2\pi f_r t).$$

- C'est la formule qui permet de restituer un signal  $x(t)$  à partir de ses valeurs échantillonnées  $x(kT_e)$  par interpolation (voir cours)

$$x_r(t) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \text{sinc}[\pi f_e (t - kT_e)]$$

avec  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$



### Exercice 1.7 — Echantillonnage d'un signal complexe.

- On considère un signal déterministe à énergie finie à valeurs réelles noté  $s(t)$ . Montrer que les parties réelles et imaginaires de la transformée de Fourier de  $s(t)$  notées  $S_r(f)$  et  $S_i(f)$  sont des fonctions respectivement paires et impaires.
- On suppose que la transformée de Fourier du signal  $s(t)$  est définie par

$$S(f) = S_r(f) + iS_i(f) = \begin{cases} A & \text{si } -F < f < 0 \\ A \left(1 - \frac{f}{2F}\right) & \text{si } 0 \leq f < 2F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter graphiquement  $S(f)$  et en déduire si  $s(t)$  est un signal réel ou complexe (on pourra utiliser 1).

- On échantillonne le signal  $s(t)$  à la fréquence  $f_e = 7F/2$ . Représenter graphiquement la transformée de Fourier du signal échantillonné

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_e) \delta(t - kT_e).$$

On désire restituer le signal  $s(t)$  par filtrage du signal  $s_e(t)$  avec un filtre de transmittance

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } F_1 < f < F_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donner des conditions que doivent vérifier les fréquences  $F_1$  et  $F_2$  pour que la restitution se fasse sans erreur. La fréquence d'échantillonnage respecte-t-elle la condition de Shannon? Pouvez-vous expliquer pourquoi on peut avoir une reconstruction sans erreur de  $s(t)$  à partir de  $s_e(t)$ ?

4. On considère un signal complexe  $s(t)$  et sa partie réelle notée  $r(t)$  telle que

$$r(t) = \frac{1}{2} [s(t) + s^*(t)]$$

Déterminer la transformée de Fourier de  $r(t)$  notée  $R(f)$  et représentez la graphiquement lorsque  $s(t)$  est le signal de la question 2). Quelle est la condition de Shannon pour le signal réel  $r(t)$ ? Expliquer ce résultat. ■

*Correction.*

1. Si  $s(t)$  est un signal déterministe à énergie finie réel, alors les parties réelle et imaginaire de sa transformée de Fourier s'écrivent

$$S_r(f) = \int s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

$$S_i(f) = \int s(t) \sin(2\pi ft) dt$$

donc en utilisant le fait que la fonction  $f \rightarrow \cos(2\pi ft)$  est paire et que la fonction  $f \rightarrow \sin(2\pi ft)$  est impaire, on obtient

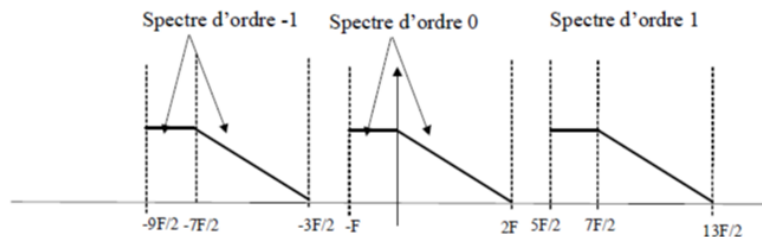
$$S_r(-f) = S_r(f) \text{ et } S_i(-f) = -S_i(f).$$

2. Puisque la transformée de Fourier du signal  $s(t)$  est réelle, on a

$$S_i(f) = 0 \text{ et } S_r(f) = \begin{cases} A & \text{si } -F < f < 0 \\ A \left(1 - \frac{f}{2F}\right) & \text{si } 0 \leq f < 2F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme  $S_r(f)$  n'est pas une fonction paire, le signal  $x(t)$  est complexe.

3. On échantillonne le signal  $s(t)$  à la fréquence  $f_e = 7F/2$ . La transformée de Fourier du signal échantillonné peut se représenter comme suit



Pour restituer le signal  $s(t)$  par filtrage du signal  $s_e(t)$  sans erreur, il suffit donc de choisir

$$-\frac{3F}{2} < F_1 < -F \text{ et } 2F < F_2 < \frac{5F}{2}$$

La fréquence d'échantillonnage est

$$f_e = \frac{7F}{2} < 2F_{\max} = 4F$$

et donc elle ne respecte pas la condition de Shannon. Ceci peut paraître étrange puisqu'on peut reconstruire  $s(t)$  à partir de  $s_e(t)$  sans erreur. On a profité du fait que le spectre de  $s(t)$  n'occupe pas toute la bande  $[-2F, 2F]$  pour créer un repliement des spectres d'ordres supérieurs qui ne se superposent pas entre eux.

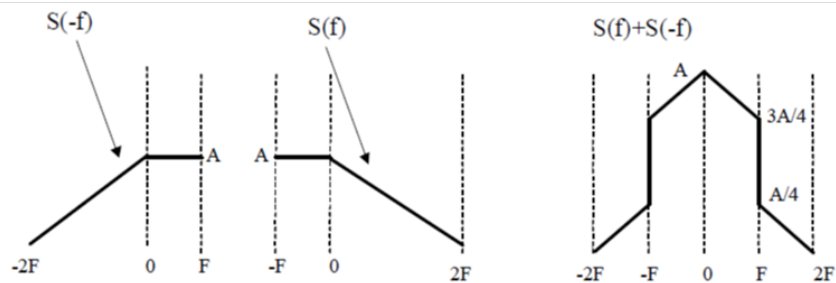
4. On considère un signal complexe  $s(t)$  et sa partie réelle notée  $r(t)$  telle que

$$r(t) = \frac{1}{2} [s(t) + s^*(t)]$$

Alors la transformée de Fourier de  $r(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{1}{2} S(f) + \frac{1}{2} S^*(-f) \\ &= \frac{1}{2} S(f) + \frac{1}{2} S(-f) \end{aligned}$$

et est représentée ci-dessous



La condition de Shannon pour le signal réel  $r(t)$  est

$$f_e > 2F_{\max} = 4F$$

Comme le spectre de  $r(t)$  occupe toute la bande  $[-2F, 2F]$ , on ne peut échantillonner avec une fréquence inférieure à  $4F$  (limite inférieure de Shannon) si on veut restituer  $r(t)$  à partir de  $r_e(t)$  sans erreur. Le fait de prendre la partie réelle du signal  $s(t)$  à crée un signal réel dont le spectre occupe toute la bande  $[-2F, 2F]$  et donc on ne bénéficie plus de la bonne propriété de la question précédente. ■

**Exercice 1.8** On considère un signal déterministe

$$x(t) = f_0 \left[ \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t} \right]^2 = f_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f_0 t)$$

avec  $f_0 > 0$ . On échantillonne le signal  $x(t)$  avec la fréquence d'échantillonnage  $F_e = 1/T_e$ . Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

notée  $X_e(f)$ . Représenter graphiquement  $X_e(f)$  lorsque  $F_e = 3f_0$  et lorsque  $F_e = f_0$ .

2. On désire restituer le signal  $x(t)$  en filtrant le signal échantillonné  $x_e(t)$  par un filtre passe bas idéal de transmittance

$$H(f) = \Pi_{F_e}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < \frac{F_e}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer l'expression du signal restitué  $x_r(t)$  lorsque  $F_e = 3f_0$  et lorsque  $F_e = f_0$ . Commenter ce résultat. ■

*Correction.*

1. La transformée de Fourier du signal échantillonné

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

est définie par

$$\begin{aligned} X_e(f) &= TF[x_e(t)] = TF\left[x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)\right] \\ &= X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e) = F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kF_e) \end{aligned}$$

Puisque

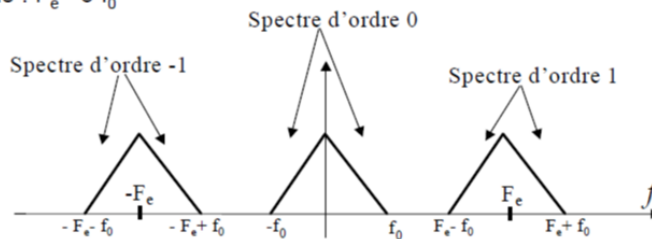
$$X(f) = TF[x(t)] = TF[f_0 \sin^2(\pi f_0 t)] = \Lambda_{f_0}(f)$$

on obtient

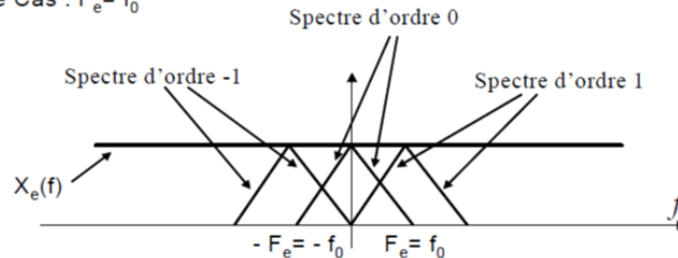
$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_{f_0}(f - kF_e)$$

Pour  $F_e = 3f_0$  et  $F_e = f_0$ , on obtient les représentations suivantes (dans le deuxième cas, on a un repliement du spectre puisqu'on ne respecte pas la condition de Shannon).

Premier Cas :  $F_e = 3f_0$



Deuxième Cas :  $F_e = f_0$



2. On désire restituer le signal  $x(t)$  en filtrant le signal échantillonné  $x_e(t)$  par un filtre passe bas idéal de transmittance

$$H(f) = \Pi_{F_e}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < F_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lorsque  $F_e = 3f_0$ , on récupère le spectre d'ordre 0, c'est-à-dire

$$F_e X(f) = 3f_0 X(f)$$

c'est-à-dire le signal temporel

$$x_r(t) = TF^{-1}[3f_0 X(f)] = 3f_0 x(t)$$

Par contre, lorsque  $F_e = f_0$ , on récupère en sortie du filtre de restitution

$$F_e \Pi_{F_e}(f) = f_0 \Pi_{f_0}(f)$$

c'est-à-dire le signal temporel

$$x_r(t) = TF^{-1}[f_0 \Pi_{f_0}(f)] = f_0^2 \operatorname{sinc}(\pi f_0 t)$$

Le signal restitué est très différent du signal d'origine car on n'a pas respecté la condition de Shannon.



### Exercice 1.9

1. On considère le signal déterministe

$$x(t) = f_m \left[ \frac{\sin(\pi f_m t)}{\pi f_m t} \right]^2$$

que l'on échantillonne avec la fréquence d'échantillonnage  $f_e = \frac{1}{T_e}$ . Déterminer le spectre du signal échantillonné idéal

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

et représenter le graphiquement. Expliquer comment on peut à l'aide de ce graphique retrouver la condition de Shannon.

- Qu'appelle-t-on formule d'interpolation de Shannon ?
- Expliquer le rôle du filtre anti-repliement.

2. Afin de reconstruire le signal  $x(t)$  à partir de  $x_e(t)$ , on considère un filtre de restitution de réponse impulsionnelle

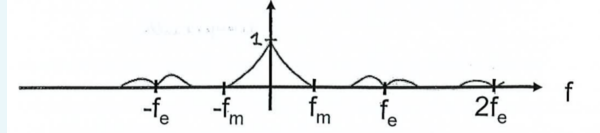
$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in ]0, T_e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Donner l'expression du signal restitué  $x_r(t) = x_e(t) * h(t)$  et montrer qu'il peut s'écrire

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) x(kT_e)$$

où  $a_k(t)$  est une fonction que l'on précisera. Représenter graphiquement le signal  $x(t)$  et sa restitution  $x_r(t)$ .

- Déterminer la transformée de Fourier du signal  $x_r(t)$  notée  $X_r(f)$ . Le module de cette transformée de Fourier est représenté ci-dessous. Expliquer cette représentation.



- Afin de compenser la distorsion induite par le filtre de restitution  $h(t)$ , on utilise un filtre appelé filtre anti-imageur de fonction de transfert

$$H_c(f) = \frac{\pi f T_e}{\sin(\pi T_e f)}$$

Expliquer l'expression de cette fonction de transfert.

*Correction.*

1. Ce résultat a été obtenu en cours

$$\begin{aligned} X_e(f) &= TF \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \right] \\ &= TF \left[ x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) \right] \\ &= X(f) * \left[ f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_e) \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$X_e(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_e)$$

Mais la transformée de Fourier de  $x(t)$  est

$$X(f) = \Lambda_{f_m}(f)$$

done

$$X_e(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_{f_m}(f - kf_e)$$

On retrouve la condition de Shannon en disant que les divers spectres  $\Lambda_{f_m}(f - kF_e)$  ne se chevauchent pas, ce qui correspond à

$$f_e - f_m > f_m \Leftrightarrow f_e > 2f_m$$

La formule d'interpolation de Shannon est l'expression qui permet à partir d'un filtrage passebas de  $x_e(t)$  de retrouver  $x(t)$ . Plus précisément, le filtre passe-bas est de transmittance

$$H(f) = \frac{1}{f_e} \Pi_{f_e}(f) \Leftrightarrow h(t) = \text{sinc}(\pi f_e t)$$



d'où la formule d'interpolation de Shannon

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) * \text{sinc}(\pi f_e t)$$

c'est-à-dire

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \text{sinc}[\pi f_e (t - kT_e)]$$

Le filtre anti-repliement est un filtre analogique situé avant le convertisseur analogique-numérique. Ce filtre évite qu'après échantillonnage certaines fréquences hors de la bande d'intérêt se retrouvent (se replient) dans la bande d'intérêt.

2. Le signal restitué s'écrit

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_e(t) * h(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) * \Pi_{T_e} \left( t - \frac{T_e}{2} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \Pi_{T_e} \left( t - kT_e - \frac{T_e}{2} \right) \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de  $x_r(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} X_r(f) &= TF[x_r(t)] \\ &= TF[x_e(t) * h(t)] \\ &= f_e \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_{f_m}(f - kf_e) \right] H(f) \end{aligned}$$

avec

$$H(f) = T_e e^{-j\pi T_e f} \text{sinc}(\pi f T_e)$$

Le module de cette transformée de Fourier est donc en supposant que  $f_e$  est suffisamment grand

$$|X_r(f)| \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_{f_m}(f - kf_e) |\text{sinc}(\pi f T_e)|$$

On voit donc que chaque spectre  $\Lambda_{f_m}(f - kf_e)$  est perturbé par le terme  $|\text{sinc}(\pi f T_e)|$  qui génère de la distorsion. C'est pour cette raison que le spectre d'ordre 0 n'apparaît pas comme un triangle. Autour des fréquences  $f_e$  et  $-f_e$ , on observe

$$\Lambda_{f_m}(f - f_e) |\text{sinc}(\pi f T_e)| \text{ et } \Lambda_{f_m}(f + kf_e) |\text{sinc}(\pi f T_e)|$$

Pour compenser la distorsion (à une phase près), il suffit d'ajouter un filtre de fonction de transfert

$$\frac{1}{T_e \text{sinc}(\pi f T_e)} = \frac{\pi f}{\sin(\pi f T_e)}$$

3.



**Exercice 1.10 Echantillonnage d'un signal passe-bande**

On considère le signal

$$x(t) = x^+(t) + x^-(t)$$

avec

$$x^+(t) = B \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt} e^{j2\pi f_0 t}$$

$$x^-(t) = B \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt} e^{-j2\pi f_0 t}$$

$f_0 = 8\text{kHz}$  et  $B = 2\text{kHz}$ .

1. Déterminer la transformée de Fourier du signal  $x(t)$  et la représenter graphiquement.
2. Comment s'écrit la condition de Shannon pour le signal  $x(t)$  ?
3. On échantillonne le signal  $x(t)$  à la fréquence  $F_e = 6\text{kHz}$ .
  - (a) Représenter graphiquement la transformée de Fourier du signal échantillonné  $x_e(t)$  dans la bande  $[-9\text{kHz}, 9\text{kHz}]$
  - (b) On désire restituer le signal  $x(t)$  à partir de  $x_e(t)$  par un filtrage de réponse en fréquence  $H(f)$ .
    - 1<sup>ier</sup> cas :  $H(f) = \Pi_F(f)$  avec  $F = 6\text{kHz}$ . Quel sera le signal restitué par ce filtre ?
    - 2<sup>me</sup> cas :  $H(f) = \Pi_B(f + f_0) + \Pi_B(f - f_0)$  avec  $f_0 = 8\text{kHz}$  et  $B = 2\text{kHz}$ . Quel sera le signal restitué par ce filtre ?
    - Conclusion ?

*Correction.*

1. Voir figure 1.4 :

$$X(f) = X^+(f) + X^-(f) = \prod_B(f) * \delta(f - f_0) + \prod_B(f) * \delta(f + f_0) = \prod_B(f - f_0) + \prod_B(f + f_0)$$

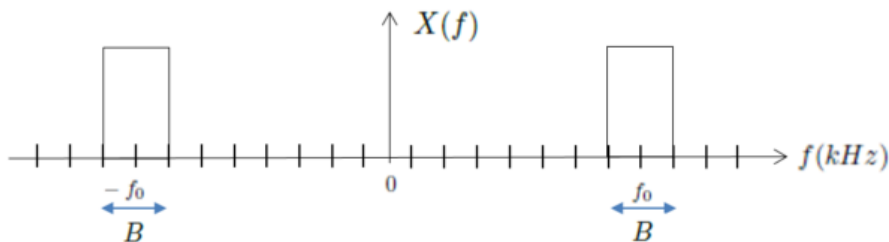
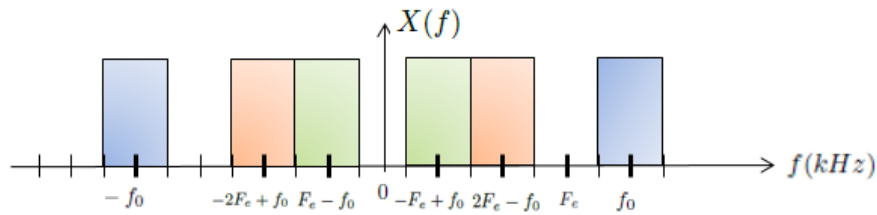


FIGURE 1.4 – Transformée de Fourier de  $x(t)$ .

2.  $F_e > 2F_{max}$  avec  $F_{max} = f_0 + \frac{B}{2} = 9\text{kHz}$  ici.
3. On échantillonne le signal  $x(t)$  à la fréquence  $F_e = 6\text{kHz}$ .
  - (a) Voir sur la figure 1.5
  - (b) On désire restituer le signal  $x(t)$  à partir de  $x_e(t)$  par un filtrage de réponse en fréquence  $H(f)$ .

FIGURE 1.5 – Transformée de Fourier de  $x(t)$  avec  $F_e = 8$  kHz.

- 1<sup>ier</sup> cas :  $H(f) = \Pi_F(f)$  avec  $F = 6$  kHz.  
Voir la figure 1.6, on retrouvera

$$x(t) = B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} e^{j2\pi f_1 t} + B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} e^{-j2\pi f_1 t} = 2B \operatorname{sinc}(\pi B t) \cos(2\pi f_1 t)$$

avec  $f_1 = -F_e + f_0 = 2$  kHz.

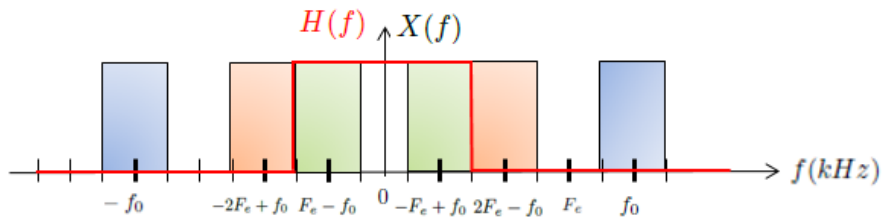


FIGURE 1.6 –

- 2<sup>me</sup> cas :  $H(f) = \Pi_B(f + f_0) + \Pi_B(f - f_0)$  avec  $f_0 = 8$  kHz et  $B = 2$  kHz.  
Voir la figure 1.7, on retrouvera

$$x(t) = B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} e^{j2\pi f_0 t} + B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} e^{-j2\pi f_0 t} = 2B \operatorname{sinc}(\pi B t) \cos(2\pi f_0 t)$$

avec  $f_0 = 8$  kHz.

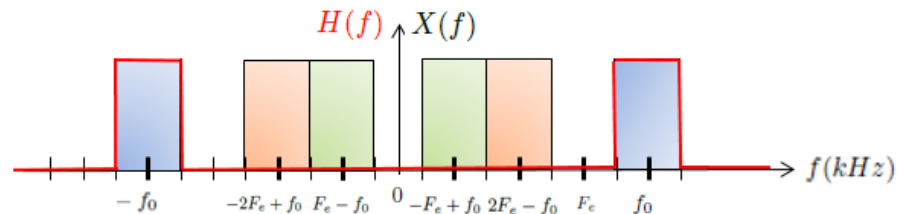


FIGURE 1.7 –

- Conclusion : Il est possible d'échantillonner un signal de type passe-bande sans respecter la condition de Shannon tout en assurant une reconstitution parfaite (par filtrage passe-bande), à condition que les repléments se fassent dans les trous du spectre de départ.

**Exercice 1.11 Echantillonneur bloqueur**

L'échantillonneur bloqueur est un échantillonneur réalisable en pratique qui consiste à acquérir un échantillon du signal,  $x(t)$ , toutes les  $T_e$  secondes (période d'échantillonnage) et à le bloquer pendant  $\tau$  secondes ( $\tau \ll T_e$ ).

1. Proposer une écriture du signal échantillonné de cette manière,  $x_e(t)$ , en fonction de l'expression du signal échantillonné de manière idéale :

$$x_{ei}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

2. Calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné à l'aide de cette méthode. L'écrire en fonction de la transformée de Fourier,  $X(f)$ , du signal de départ.
3. Est-il possible de dimensionner  $\tau$  pour que l'échantillonnage par bloqueur se rapproche d'un échantillonnage idéal ?

*Correction.*

1. Le signal échantillonné par bloqueur va être constitué d'une somme de fonctions porte espacées de  $T_e$ , de largeur  $\tau$  et de hauteur  $x(kT_e)$  si  $x(kT_e)$  représente la valeur de l'échantillon prélevé sur le signal  $x(t)$  à l'instant  $kT_e$ . On peut donc écrire le signal échantillonné,  $x_e(t)$ , de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \Pi_{\tau} \left( t - \frac{\tau}{2} - kT_e \right) \\ &= \Pi_{\tau} \left( t - \frac{\tau}{2} \right) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \\ &= \Pi_{\tau} \left( t - \frac{\tau}{2} \right) * x_{ei}(t) \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} X_e(f) &= \tau \text{sinc}(\pi f \tau) e^{-j\pi f \tau} * X_{ei}(f) \\ &= \tau \text{sinc}(\pi f \tau) e^{-j\pi f \tau} * F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - kF_e) \end{aligned}$$

où  $F_e = \frac{1}{T_e}$  représente la fréquence d'échantillonnage du signal.

3. Si le critère de Shannon est vérifié, on pourra récupérer  $X(f)$  à condition que  $\frac{1}{\tau} \gg F_{max}$ , en appelant  $F_{max}$  la fréquence maximale du signal  $x(t)$ . On aura alors, en effet,  $\text{sinc}(\pi f \tau) \simeq 1$  sur la bande du signal.

**Exercice 1.12 Quantification d'une sinusoïde**

Soit un signal sinusoïdal

$$x(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

avec  $f_0 = 50\text{Hz}$ ,  $A_0 = 220\sqrt{2}\text{V}$  et  $\phi$  une phase aléatoire uniformément répartie entre 0 et  $2\pi$ .

On suppose que la quantification de cette sinusoïde est effectuée dans de bonnes conditions : pas

d'écritage du signal, pas de quantification  $q = \frac{D}{2^{nb}}$  suffisamment fin ( $D$  représentant la dynamique du signal et  $nb$  le nombre de bits de quantification). Elle est donc équivalente à l'ajout d'un bruit,  $n_Q(t)$ , sur le signal non quantifié de départ, bruit aléatoire, centré qui suit une loi uniforme sur  $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$ . Déterminer le rapport signal à bruit de quantification en fonction de  $nb$ . ■

*Correction.*

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_x}{P_n} \right)$$

si  $P_x$  représente la puissance du signal  $x(t)$  et  $P_n$  la puissance du bruit de quantification,  $n_Q(t)$ , qui vient s'ajouter au signal de départ.

$$P_x = \frac{A_0^2}{2}$$

(résultat classique pour la puissance d'un sinus ou d'un cosinus, calculé par exemple dans l'exercice 3.14 de la partie I)

$$P_n = E [n_Q^2(t)] = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q} n_Q^2(t) dn_Q = \frac{1}{q} \left[ \frac{n_Q^3(t)}{3} \right]_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} = \frac{q^2}{12}$$

D'où

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{3}{2} 2^{2nb} \right) \simeq 1.76 + 6nb$$

■



## 2. Transformée de Fourier Discrète

### 2.1 Rappels

Un signal numérique est un tableau de points contenant un nombre fini,  $N$ , de valeurs de signal :  $[x(0) x(1) \dots x(N-1)]$ , le  $k^{\text{ième}}$  élément  $x(k)$  représentant en réalité  $x(kT_e)$  si on considère un échantillonnage temporel périodique de période  $T_e$ .

On travaille donc avec un signal échantillonné et limité dans le temps et il n'est pas possible d'utiliser l'expression suivante pour en déterminer la transformée de Fourier :

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{j2\pi f t} dt$$

**Des approximations doivent être effectuées à partir de l'expression de  $X(f)$  pour obtenir un outil implantable en numérique (Transformée de Fourier Discrète ou TFD) :**

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

**Ces approximations, ainsi que leurs conséquences, doivent être connues de manière à être capable de mener correctement une analyse spectrale en numérique.**

**Un signal numérique est échantillonné.** Sa transformée de Fourier est donc périodique de période  $T_e = \frac{1}{F_e}$  et on doit donc faire attention au respect du théorème d'échantillonnage de Shannon si on veut conserver l'information du signal de départ dans le signal échantillonné.

**Un signal numérique est composé d'un nombre fini de points.** La connaissance du signal sur un nombre limité de points conduit à une distorsion de la transformée de Fourier attendue : convolution par la de la transformée de Fourier de la fenêtre de troncature du signal. On réalise alors chaque analyse spectrale en utilisant plusieurs fenêtres de troncature (fenêtres de pondération) pour obtenir différentes visualisations de la transformée de Fourier d'un même signal afin d'en extraire des informations différentes.

**Tout comme le signal numérique ne peut pas être à temps continu, il ne sera possible de calculer qu'un nombre fini d'échantillons de la TFD.** Cela a deux conséquences : une mauvaise résolution de la TFD observée, qui pourra être améliorée en utilisant une méthode d'interpolation comme le zero padding, et un signal qui devra être considéré comme périodique en temporel par transformée de Fourier inverse, ce qui aura pour effet de transformer un produit en produit de convolution circulaire (entre signaux périodisés).

## 2.2 Exercices

### Exercice 2.1 — Etude de la TFD d'un signal à spectre continu : effet de la limitation de la durée du signal.

Soit le signal  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On observe le signal sur une durée limitée  $L$ .

1. Montrer que la transformée de Fourier du signal observé sur une durée  $[0, L]$  s'écrit  $X_L(f) = X(f)G(f, L)$
2. Déterminer le module de  $G(f, L)$ .
3. Montrer que  $|G(f, L)|$  est compris entre  $1 - e^{-aL}$  et  $1 + e^{-aL}$ .
4. Chiffrer ces bornes pour  $L = \frac{4}{a}$ .
5. Déterminer la phase de  $G(f, L)$ .
6. En utilisant les développements limités dans le cas où  $L \gg \frac{1}{a}$ , montrer qu'on peut arriver à la valeur approchée de la phase suivante :

$$\text{Arg}[G(f, L)] \simeq e^{-aL} \sin(2\pi fL)$$

7. Borner la valeur approchée de la phase et la chiffrer pour  $L = \frac{4}{a}$ .
8. Quelle conclusion peut-on tirer de ces calculs sur l'effet de la troncature du signal  $x(t)$  ?

*Correction.*

1. Calculons tout d'abord la transformée de Fourier du signal  $x(t)$  :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (2.1)$$

puis celle du signal observé sur une durée  $[0, L]$  :

$$X_L(f) = \int_0^L x(t)e^{j2\pi ft} dt = \int_0^L e^{(-a+j2\pi f)t} dt = X(f) \cdot G(f, L)$$

avec

$$G(f, L) = 1 - e^{-(a+j2\pi f)L} = 1 - e^{-aL} (\cos(2\pi fL) - j \sin(2\pi fL))$$

- 2.

$$\begin{aligned} |G(f, L)|^2 &= (1 - e^{-aL} \cos(2\pi fL))^2 + e^{-2aL} \sin^2(2\pi fL) \\ &= 1 - 2e^{-aL} \cos(2\pi fL) + e^{-2aL} \end{aligned}$$



3.

$$(1 - e^{-aL}) \text{ (quand } \cos(2\pi fL) = +1) \leq |G(f, L)| \leq (1 + e^{-aL}) \text{ (quand } \cos(2\pi fL) = -1)$$

4. Pour  $L = \frac{4}{a}$  on a :

$$e^{-aL} = e^{-4} = 0.0183$$

D'où

$$0.9817 \leq |G(f, L)| \leq 1.0183$$

$$|G(f, L)| \simeq 1$$

Et donc :

$$|X_L(f)| = |X(f)| |G(f, L)| \simeq |X(f)|$$

5.

$$\text{Arg}[G(f, L)] = \text{Arctan} \left( \frac{e^{-aL} \sin(2\pi fL)}{1 - e^{-aL} \cos(2\pi fL)} \right)$$

6. Pour  $L \ll \frac{1}{a}$  on a :

$$e^{-aL} \ll 1$$

Et donc

$$\text{Arg}[G(f, L)] \simeq \text{Arctan}(e^{-aL} \sin(2\pi fL))$$

car

$$e^{-aL} \cos(2\pi fL) \ll 1$$

D'où

$$\text{Arg}[G(f, L)] \simeq e^{-aL} \sin(2\pi fL)$$

car

$$\text{Arctan}(x) \simeq x \text{ quand } x \ll 1$$

7.

$$|\text{Arg}[G(f, L)]| \leq e^{-aL} = 0.0183 \simeq 0$$

Et donc

$$\text{Arg}[X_L(f)] = \text{Arg}[X(f)] + \text{Arg}[G(f, L)] \simeq \text{Arg}[X(f)]$$

8. On n'abime donc pas trop ni le module ni l'argument du spectre en observant le signal sur une durée suffisante (vrai pour  $L = \frac{4}{a}$ , alors  $e^{-aL} \simeq 0.02$ ).

**!!Attention !!** En nommant  $w_L(t)$  la fenêtre de troncature du signal à une durée  $L$  on a bien  $TF[x(t)w_L(t)] = X(f) * W_L(f)$ , où  $W_L(f)$  représente la transformée de Fourier de la fenêtre de troncature (rectangulaire ici). On a juste montré que, dans ce cas, la dégradation du spectre due à la convolution par la transformée de Fourier de la fenêtre de troncature se ramène à une erreur multiplicative que l'on a appelé  $G(f, L)$ , c'est-à-dire :  $TF[x(t)w_L(t)] = X(f) * W(f) = X(f)G(f, L)$ . ■

**Exercice 2.2** — Etude de la TFD d'un signal à spectre continu : effet de l'échantillonnage du signal.

Soit le signal  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal  $x(t)$ . Tracer  $|X(f)|$ .
2. En théorie le signal  $x(t)$  est-il échantillonnable sans perte d'information ? Expliquez votre réponse.
3. En considérant la transformée de Fourier comme négligeable pour une atténuation minimale de 40 dB par rapport à sa valeur maximum, dimensionner la fréquence d'échantillonnage à utiliser  $F_e$ .
4. Donner l'expression de la transformée de Fourier d'un signal  $x(t)$  échantillonné à  $T_e$ , c'est-à-dire la transformée de Fourier de  $\{x(kT_e)\}$  pour  $k = -\infty, \dots, +\infty$ . On la notera  $X_e(f)$ .
5. Déterminer  $X_e(f)$  pour le signal donné par (1.3). Vérifier qu'elle est périodique de période  $F_e$ . La comparer à  $X(f)$ .

*Correction.*

1.  $X(f)$  a été calculée précédemment : voir équation 2.1.
2.  $X(f)$  est à support non borné. En théorie  $x(t)$  n'est donc pas échantillonnable sans perte d'information. Cependant  $X(f)$  tend vers 0 quand  $f \rightarrow \infty$ . En pratique le signal  $x(t)$  pourra donc être échantillonné avec une perte d'information "acceptable". Reste à définir un critère d'acceptabilité pour la perte d'information. Dans l'exercice on demande de considérer que  $X(f)$  est nul pour une atténuation de plus de 40 dB par rapport à son maximum (voir question suivante).
3. On va considérer que  $X(f)$  est nul pour une atténuation de plus de 40 dB par rapport à son maximum pour en déduire une fréquence maximale  $F_{max}$  et l'utiliser pour dimensionner la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  :

$$20 \log |X(F_{max})| = 20 \log |X_{max}(f)| - 40 \text{dB} = 20 \log |X(0)| - 20 \log 10^2 \Leftrightarrow |X(F_{max})| = \frac{|X(0)|}{10^2}$$

Ce qui conduit à

$$F_{max} \simeq \frac{100a}{2\pi}$$

Et donc

$$F_e > \frac{100a}{\pi}$$

4.

$$X_e(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

5.

$$X_e(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ e^{-(a+j2\pi f T_e)} \right]^k = \frac{1}{1 - e^{-(a+j2\pi f T_e)}}$$

$X(f)$  est bien périodique de période  $F_e$  :  $X(f + pF_e) = X(f)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ .

Remarques :

- Pour  $f \ll \frac{F_e}{2} \Rightarrow \frac{2f}{F_e} \ll 1$  on peut faire un développement limité de l'exponentielle (on a aussi  $aT_e = \frac{100}{\pi} \ll 1$ ) qui donne

$$X_e(f) \sim \frac{1}{a + j2\pi f T_e} = F_e X(f)$$

Ce résultat s'explique par le fait que l'influence de la périodisation d'ordre 1 devient importante quand  $f$  approche de  $\frac{F_e}{2}$  mais est faible quand  $f \ll \frac{F_e}{2}$ . Le facteur  $F_e$  est dû au fait que l'on définit la TFD (équation (??)) à un facteur  $T_e$  près.

- on pensera à utiliser un filtre anti repliement avant d'échantillonner  $x(t)$ .

■

### Exercice 2.3 — Etude de la TFD d'un signal à spectre continu : échantillonnage et limitation de la durée du signal.

Soit le signal  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

1. Donner l'expression de la transformée de Fourier d'un signal  $x(t)$  échantillonné à  $T_e$  et limité à  $N$  points, c'est-à-dire la transformée de Fourier de  $\{x(kT_e)\}$  pour  $k = 0, \dots, N-1$ . On la notera  $X_D(f)$ .
2. Déterminer  $X_D(f)$  pour le signal donné par (??). La comparer à  $X(f)$ .

■

*Correction.*

1.

$$X_D(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} \quad (2.2)$$

2.

$$X_D(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ e^{-(a+j2\pi f T_e)} \right]^k = \frac{1 - e^{-(a+j2\pi f)NT_e}}{1 - e^{-(a+j2\pi f)T_e}}$$

Se combinent ici les deux approximations précédentes.

■

### Exercice 2.4 — Etude de la TFD d'un signal à spectre discontinu : calcul d'un nombre fini de points du spectre.

Soit le signal  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \phi)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \phi = \text{constante}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal  $x(t)$ .

2. Déterminer la transformée de Fourier du signal observé sur une durée limitée  $[0, L]$ . On la note  $X_L(f)$ .
3. Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné à  $T_e$  et observé sur  $N$  points. On la note  $X_D(f)$ .
4. La transformée de Fourier numérique (spectre du signal) ne sera calculée que pour un nombre fini,  $N$ , de points :  $X_D(f) \rightarrow \{X_D(n\frac{F_e}{N})\}$  pour  $n = 0, \dots, N-1$ .  
Dans le cas où  $f_0 = \frac{n_0}{N}F_e$ , avec  $n_0$  entier, déterminer  $X_D(n)$  (notation pour  $X_D(n\frac{F_e}{N})$ ) puis tracer  $|X_D(n)|$  pour  $n = 0, \dots, N-1$ . Que constate-t-on ?
5. Tracer  $|X_D(n)|$ , pour  $n = 0, \dots, N-1$ , dans le cas où  $f_0 = \frac{n_0 + \varepsilon}{N}F_e$ ,  $n_0$  entier et  $0 < \varepsilon < 1$ . Ce résultat est-il satisfaisant (permet-il une analyse spectrale correcte) ?
6. Quelle méthode peut-on utiliser pour améliorer la visualisation de la transformée de Fourier numérique (et donc le résultat de l'analyse spectrale) ?

*Correction.*

1.  $x(t) = Ae^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow X(f) = Ae^{j\phi} \delta(f - f_0)$
2. Pour obtenir  $X_L(f)$ , on peut procéder de deux manières :

$$\begin{aligned} X_L(f) &= \int_0^L x(t)e^{-j2\pi ft} dt = Ae^{j\phi} \int_0^L e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt \\ &\rightarrow AL e^{j\phi} \text{sinc}(\pi(f-f_0)L) e^{-j\pi(f-f_0)L} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} X_L(f) &= TF \left[ x(t) \Pi_L \left( t - \frac{L}{2} \right) \right] = X(f) * \{L \text{sinc}(\pi fL) e^{-j\pi fL}\} \\ &= AL e^{j\phi} \text{sinc}(\pi(f-f_0)L) e^{-j\pi(f-f_0)L} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\Pi_L(t - \frac{L}{2})$  représente une fenêtre rectangulaire (ou fonction porte) de largeur  $L$  centrée en  $\frac{L}{2}$ .

3.

$$\begin{aligned} X_D(f) &= Ae^{j\phi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ e^{-j\pi(f-f_0)T_e} \right]^k = \frac{1 - e^{-j2\pi(f-f_0)NT_e}}{1 - e^{-j2\pi(f-f_0)T_e}} \\ &= Ae^{j\phi} e^{-j\pi(f-f_0)(N-1)T_e} \frac{\sin(\pi(f-f_0)NT_e)}{\sin(\pi(f-f_0)T_e)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

4. On calcule  $N$  points du spectre sur une période  $F_e$ , d'où le pas de calcul de  $\frac{F_e}{N}$ . La variable fréquentielle  $f$  devient donc  $n\frac{F_e}{N}$ , avec  $n = 0, \dots, N-1$ .

Dans le cas où  $f_0 = n_0\frac{F_e}{N}$ , on a :

$$X_D(n) = Ae^{j\phi} e^{-j\pi\frac{(n-n_0)}{N}(N-1)} \frac{\sin(\pi(n-n_0))}{\sin\left(\pi\frac{(n-n_0)}{N}\right)}$$

qui donne :

$$X_D(n) = \begin{cases} Ae^{j\phi} N & \text{pour } n = n_0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La figure 2.1 donne un exemple de représentation de  $X_D(n)$  dans le cas où  $n_0 = 4$ . On remarque que l'on retrouve la transformée de Fourier théorique d'une exponentielle de fréquence  $f_0$ , soit un Dirac en  $f_0$ .

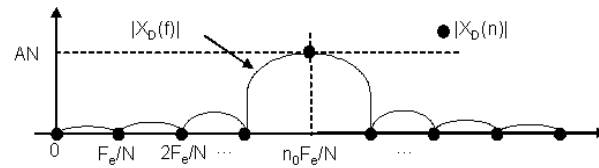


FIGURE 2.1 – Exemple de représentation de  $X_D(n)$  dans le cas où  $n_0 = 4$ .

5. Le cas où  $f_0 = n_0 \frac{F_e}{N}$  est un cas très particulier. La plupart du temps on a  $f_0 = (n_0 + \varepsilon) \frac{F_e}{N}$ . Un exemple de la transformée de Fourier numérique  $X_D(n)$  correspondante est tracé sur la figure 2.2. A partir des points représentant la transformée de Fourier numérique du signal nous n'avons plus aucun moyen de décider qu'il s'agit du spectre d'une exponentielle.

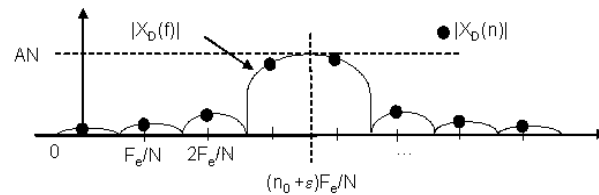


FIGURE 2.2 – Exemple de représentation de  $X_D(n)$  dans le cas où  $n_0 = 4 + \varepsilon$ .

6. La solution permettant de mieux visualiser le spectre est d'interpoler. On le fera grâce à la technique du Zero Padding.





## 3. Transformée en z

### 3.1 Rappels

**Tout comme la transformée de Laplace permet l'étude des systèmes analogiques linéaires invariants dans le temps, la transformée en z va permettre l'étude des systèmes numériques linéaires invariants dans le temps.**

Elle est définie par :

$$X(z) = TZ[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, z \in C$$

En utilisant le critère de Cauchy, on montre qu'elle converge pour  $0 \leq R_x^- \leq |z| < R_x^+ < \infty$  avec

$$R_x^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)|} \text{ et } R_x^+ = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}}$$

La transformée en z inverse est définie par :

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z)z^{n-1} dz$$

où  $C^+$  est un contour fermé inclut dans l'anneau de convergence.

**Tout comme la transformée de Laplace pour les systèmes analogiques, la transformée en z permet de réaliser à la fois une étude temporelle et une étude fréquentielle des systèmes numériques. L'étude fréquentielle est obtenue pour  $z = e^{j\omega} = e^{j2\pi f}$ .**

En plus de sa linéarité, la propriété suivante de la TZ est très utilisée lors de l'étude des systèmes numériques linéaires invariants dans le temps

$$TZ[x(n - n_0)] = z^{-n_0} TZ[x(n)]$$

Comme pour la transformée de Laplace et la transformée de Fourier, il existe des tables de transformée en z.

Signal : $x(n)$	Transformée en z : $X(z)$	Domaine de convergence
$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$	1	$\mathbb{C}$
$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n > 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases}$	$z^{-k}$	$\mathbb{C}^*$
1	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
$n$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z  > 1$
$a^n$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  > a$
$na^n$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  > a$
$\cos(\omega n)$	$\frac{1 - \cos\omega z^{-1}}{1 - 2\cos\omega z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\sin(\omega n)$	$\frac{\sin\omega z^{-1}}{1 - 2\cos\omega z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$a^n \cos(\omega n)$	$\frac{1 - a \cos\omega z^{-1}}{1 - 2a \cos\omega z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z  > a$
$a^n \sin(\omega n)$	$\frac{a \sin\omega z^{-1}}{1 - 2a \cos\omega z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z  > a$

FIGURE 3.1 – Table de transformée en z

## 3.2 Exercices

### Exercice 3.1 — Existence, convergence. ??

Soit un réel  $a \in ]0, 1[$  et  $u(n)$  l'échelon de Heaviside (ou échelon unité) :

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n > 0 \\ 0 & \text{pour } n \leq 0. \end{cases}$$

- Déterminer la transformée en z du signal  $x(n) = a^n u(n)$ , avec  $|a| < 1$ , et préciser avec soin la région de convergence de  $X(z)$ .
- Déterminer la transformée en z du signal  $y(n) = -a^n u(-n - 1)$ , avec  $|a| < 1$ , et préciser avec soin la région de convergence de  $Y(z)$ .



3. Soit  $b$  un réel tel que  $b > a$  et  $|b| < 1$ . On considère un système de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}$$

Déterminer la réponse impulsionnelle  $h(n)$  du système dans les trois cas suivants :

- la région de convergence de  $H(z)$  est  $|z| < a$ ,
- la région de convergence de  $H(z)$  est  $a < |z| < b$ ,
- la région de convergence de  $H(z)$  est  $|z| > b$ .

*Correction.*

1.

$$x(n) = a^n u(n), |a| < 1 \rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} [az^{-1}]^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Domaine d'existence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a^n z^{-n}|} < 1 \text{ pour } |z| > |a|$$

2.

$$y(n) = -a^n u(-n-1), |a| < 1$$

$$\rightarrow Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -[az^{-1}]^n = \sum_{n=1}^{+\infty} -[a^{-1}z]^n = -\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} [a^{-1}z]^n - 1 \right\} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Domaine d'existence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a^{-n} z^n|} < 1 \text{ pour } |z| < |a|$$

Conclusion : la transformée en  $z$  inverse n'est pas unique. Son expression dépend du contour choisi pour la calculer. S'il inclut tous les points singuliers (premier cas dans cet exercice) on obtient une solution causale, sinon elle ne l'est pas (deuxième cas dans cet exercice).

3. Plusieurs méthodes sont possibles pour résoudre cette question. Par exemple, par décomposition en éléments simples, on obtient :

$$H(z) = \frac{1}{a-b} \left\{ \frac{a}{1 - az^{-1}} - \frac{b}{1 - bz^{-1}} \right\}$$

— pour  $|z| < a$  :

$$h(n) = \frac{1}{a-b} \left\{ -a^{n+1} u(-n-1) + b^{n+1} u(-n-1) \right\}.$$

Aucun des points singuliers n'est inclus dans le contour considéré.  $h(n)$  est non causale.

— pour  $a < |z| < b$  :

$$h(n) = \frac{1}{a-b} \left\{ a^{n+1} u(n) + b^{n+1} u(-n-1) \right\}.$$

Le contour considéré inclut le point singulier  $z = a$  et exclut  $z = b$ .  $h(n)$  est constituée d'une partie causale et d'une partie non causale.

— pour  $|z| > b$  :

$$h(n) = \frac{1}{a-b} \{a^{n+1} - b^{n+1}\} u(n).$$

Le contour considéré inclut tous les points singuliers ( $z = a$  et  $z = b$ ). La transformée en z inverse est causale. ■

### Exercice 3.2 — Utilisation pour l'étude d'un système discret.

Soit le système d'entrée  $x(n)$  et de sortie  $y(n)$  défini par l'équation récurrente suivante :

$$y(n) - ay(n-1) = x(n), \text{ avec } |a| < 1$$

1. Soit  $x(n) = b^n u(n)$  avec  $|b| < 1$ . Déterminer sa transformée en z, ainsi que son domaine d'existence.
2. Déterminer la réponse du système à l'entrée  $x(n)$  définie à la question précédente, en supposant que le système est causal.
3. Déterminer la fonction de transfert, ainsi que la réponse impulsionnelle du système. ■

*Correction.*

1.

$$x(n) = b^n u(n), |b| < 1 \rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} [bz^{-1}]^n = \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

Domaine d'existence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|b^n z^{-n}|} < 1 \text{ pour } |z| > |b|$$

2.

$$\begin{aligned} y(n) - ay(n-1) = b^n u(n) &\rightarrow Y(z) - az^{-1}Y(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} \\ \rightarrow Y(z) &= \left\{ \frac{1}{1-az^{-1}} \right\} \left\{ \frac{1}{1-bz^{-1}} \right\} \end{aligned}$$

Soit en considérant un système causal :

$$y(n) = \frac{1}{a-b} \{a^{n+1} - b^{n+1}\} u(n)$$

3.

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \rightarrow Y(z) - az^{-1}Y(z) = X(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

■

## 4. Filtrage Linéaire

### 4.1 Rappels

Nous nous intéressons uniquement ici aux filtres numériques linéaires invariants dans le temps rationnels.

- Un filtre numérique linéaire invariant dans le temps est défini par sa réponse impulsionnelle  $h(n)$  et sa fonction de transfert  $H(z) = TZ[h(n)]$ . Il fait correspondre à toute entrée  $x(n)$  une sortie

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)x(k)$$

La réponse en fréquence, ou réponse harmonique, du filtre est donnée par

$$H(\tilde{f}) = [H(z)]_{z=e^{j2\pi\tilde{f}}}, \text{ où } \tilde{f} = \frac{f}{F_e}$$

Il est réalisable si :

- $h(n) = 0$  pour  $n < 0$  (causalité).
- $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$  (stabilité).
- $h(n)$  est réelle.

- Les filtres rationnels sont définis par une fonction de transfert rationnelle en  $z$ , correspondant à une équation récurrente dans le domaine temporel. Il existe deux catégories de filtres rationnels :

- Les filtres rationnels de type RII (à réponse impulsionnelle infinie), définis par deux ensembles de coefficients,  $\{a_k\}_{k=0,\dots,M-1}$  et  $\{b_k\}_{k=0,\dots,N-1}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

Le degré du dénominateur donne l'ordre du filtre.

- Les filtres rationnels de type RIF (à réponse impulsionnelle finie), définis par un seul jeu de coefficients  $\{b_k\}_{k=0,\dots,N-1}$ , le nombre de coefficient donnant l'ordre du filtre

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}$$

Un filtre numérique rationnel de type RIF est inconditionnellement stable et c'est un de ses avantages majeurs. Un filtre RII est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert,  $H(z)$ , sont de modules inférieurs à 1. Nous verrons ici que cela peut se décliner en un lieu de stabilité dans le plan des coefficients définissant le filtre (voir exercice 4.4).

La synthèse d'un filtre numérique rationnel correspond au passage entre les spécifications à respecter sur la réponse en fréquence et l'ensemble des coefficients le définissant. Elle est différente selon que l'on souhaite réaliser un filtre de type RIF ou de type RII. Des exemples de ces deux types de synthèse sont donnés dans les exercices 4.3 et 4.5 pour réaliser un filtre passe-bas.

## 4.2 Exercices

**Exercice 4.1** On considère un filtre de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux réels  $\in ]0, 1[$  avec  $b > a$ .

1. Quel est l'ordre du filtre défini par la fonction de transfert  $H(z)$  ?
2. Déterminer l'équation récurrente définissant le filtre dans le domaine temporel.
3. Quel type de filtre rationnel (RIF, RII) est défini par  $H(z)$  ? Justifiez votre réponse.
4. Le filtre défini par  $H(z)$  est-il stable ? Justifiez votre réponse.
5. En réutilisant les résultats de l'exercice 3.1, déterminer la réponse impulsionnelle  $h(n)$  permettant de pouvoir réaliser le filtre.

*Correction.*

1. Le filtre défini par la fonction de transfert  $H(z)$  est d'ordre 2 (degré du dénominateur).

2.

$$Y(z) (1 - (a+b)z^{-1} + abz^{-2}) = X(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} y(n) = x(n) + (a+b)y(n-1) - aby(n-2)$$

3. Ce filtre est de type RII car il présente une boucle de réaction : la sortie à l'instant  $n$  dépend de l'entrée à l'instant  $n$  mais également des valeurs passées de la sortie ( $y(n-1)$  et  $y(n-2)$ ).
4. Ce filtre sera stable si les pôles de  $H(z)$  sont inclus dans le cercle de rayon 1. Pour cela il faut que  $|a| < 1$  et  $|b| < 1$ , ce qui est le cas ici. Le filtre est donc stable.

5.  $h(n) = \frac{1}{a-b} \{a^{n+1} - b^{n+1}\} u(n)$  conduit à un filtre causal.

**Exercice 4.2** Soit le filtre d'entrée  $x(n)$  et de sortie  $y(n)$  défini par l'équation récurrente suivante :

$$y(n) = x(n) - ax(n-1)$$

1. Déterminer sa fonction de transfert  $H(z)$ .
2. Déterminer la transformée en  $z$  de  $\delta(n)$  et de  $\delta(n-1)$ , où  $\delta(n)$  représente le Dirac numérique :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

En déduire la réponse impulsionnelle du filtre.

3. Déterminer la transformée en  $z$  de la fonction échelon unité  $u(n)$ , ainsi que son domaine d'existence. En déduire la réponse indicielle du filtre (réponse à un échelon).
4. Ce filtre est-il de type RIF ou RII ? Justifiez votre réponse.
5. Ce filtre est-il stable ? Justifiez votre réponse.
6. Ce filtre est-il causal ? Justifiez votre réponse.

*Correction.*

1.  $Y(z) = X(z) - az^{-1}X(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - az^{-1}$
2.  $\delta(n) \rightarrow \Delta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)z^{-n} = \delta(0)z^0 = 1$   
 $TZ[\delta(n-1)] = z^{-1}TZ[\delta(n)] = z^{-1}$ .

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - az^{-1} \rightarrow h(n) = TZ^{-1}[H(z)] = \delta(n) - a\delta(n-1)$$

Remarque : on pouvait obtenir directement  $h(n)$  pour  $x(n) = \delta(n)$  en utilisant l'équation de récurrence définissant le système.

3.

$$U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Domaine d'existence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|z^{-n}|} < 1 \text{ pour } |z| > 1$$

Réponse indicielle :

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{1-az^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{az^{-1}}{1-z^{-1}} \rightarrow y(n) = u(n) - au(n-1)$$

Remarque : on pouvait obtenir directement la réponse indicielle (= réponse à un échelon) pour  $x(n) = u(n)$  en utilisant l'équation de récurrence définissant le système.

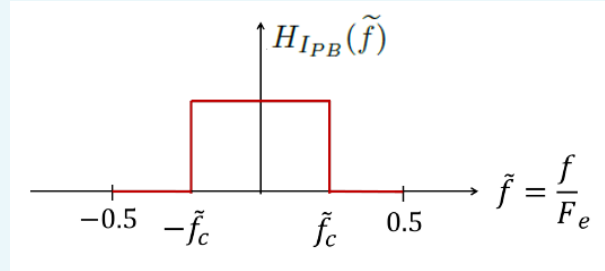
4. Ce filtre est un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) car il ne présente pas de boucle de réaction : la sortie à l'instant  $n$  ne dépend pas de ses valeurs passées.

5. Un filtre RIF est stable si ses coefficients sont finis, ce qui est le cas ici.
6. Ce filtre est causal car sa réponse impulsionnelle est nulle pour  $n < 0$ .

■

### Exercice 4.3 — Synthèse d'un filtre passe-bas de type RIF.

On veut synthétiser un filtre passe-bas en essayant d'approcher par un filtre RIF la fonction de transfert idéale de la figure suivante :



Filtre passe-bas - Fonction de transfert idéale

Donner l'expression de la réponse impulsionnelle d'un filtre à  $2N + 1$  coefficients utilisant une fenêtre rectangulaire de troncature et d'un filtre à  $2N + 1$  coefficients utilisant une fenêtre de troncature de Hamming donnée par  $w(n) = 0.54 + 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{2N+1})$ .

■

*Correction.*

La réponse en fréquence idéale  $H_{IPB}(\tilde{f})$  est périodique, donc décomposable en série de Fourier :

$$H_{IPB}(\tilde{f}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{IPB}(k) e^{j2\pi\tilde{f}k}$$

où les coefficients de la série de Fourier  $h_{IPB}(k)$  représentent les éléments de la réponse impulsionnelle, ou "coefficients", du filtre. Ici :

$$h_{IPB}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{IPB}(\tilde{f}) e^{-j2\pi\tilde{f}k} d\tilde{f} = \int_{-\tilde{f}_c}^{\tilde{f}_c} e^{-j2\pi\tilde{f}k} d\tilde{f}.$$

conduisant, après calculs, à

$$h_{IPB}(k) = 2\tilde{f}_c \text{sinc}(2\pi\tilde{f}_c k)$$

En pratique le nombre de coefficients du filtre devra être limité à un nombre  $2N + 1$ , appelé "ordre" du filtre. On modélise cette limitation par l'utilisation d'une fenêtre de troncature, ou de pondération,  $w(k)$ , de longueur  $2N + 1$  :

$$h_{PB}(k) = h_{IPB}(k) \times w(k)$$

Elle conduit à une réponse en fréquence approchée :

$$H_{PB}(\tilde{f}) = H_{IPB}(\tilde{f}) * W(\tilde{f})$$

où  $W(\tilde{f})$  est la transformée de Fourier de  $w(k)$ .

On propose d'utiliser ici une fenêtre rectangulaire de troncature ou une fenêtre de Hamming. Dans le cas de la fenêtre rectangulaire on a :

$$\begin{aligned} h_{PB}(k) &= 2\tilde{f}_c \operatorname{sinc}(2\pi\tilde{f}_c k) \text{ pour } k = -N, \dots, N \\ &= 0 \text{ ailleurs} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dans le cas de la fenêtre de Hamming on a :

$$\begin{aligned} h_{PB}(k) &= 2\tilde{f}_c \operatorname{sinc}(2\pi\tilde{f}_c k) \times \left( 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi k}{2N+1}\right) \right) \text{ pour } k = -N, \dots, N \\ &= 0 \text{ ailleurs} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Les figures 4.1 et 4.2 tracent les réponses impulsionnelles et les fonctions de transfert des deux filtres pour une fréquence de coupure  $f_c = 100$  Hz, une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 800$  Hz et un ordre  $N = 31$ .

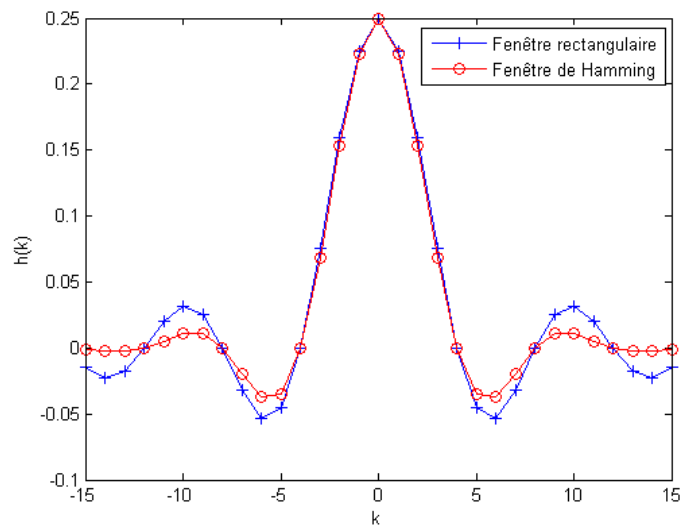


FIGURE 4.1 – Réponses impulsionnelles du filtre passe-bas de type RIF synthétisé avec les paramètres suivants :  $f_c = 100$  Hz,  $F_e = 800$  Hz, *ordre* = 31, pour deux fenêtres de troncature : rectangulaire et Hamming.

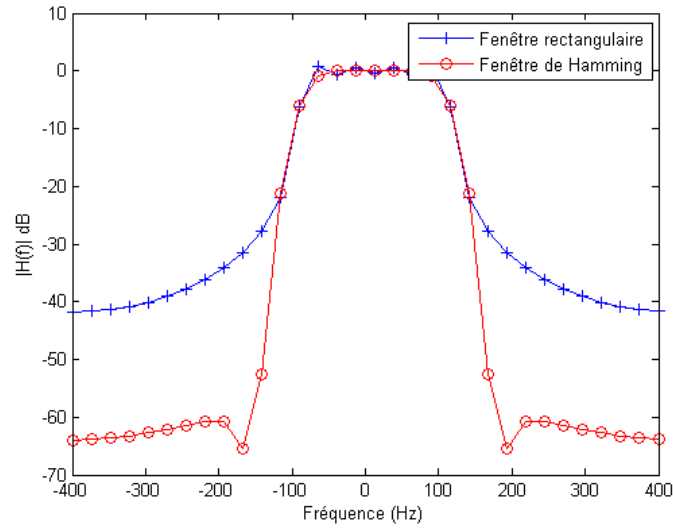


FIGURE 4.2 – Fonctions de transfert du filtre passe-bas de type RIF synthétisé avec les paramètres suivants :  $f_c = 100$  Hz,  $F_e = 800$  Hz,  $ordre = 31$ , pour deux fenêtres de troncature : rectangulaire et Hamming.

La figure 4.3 trace un exemple de signal d'entrée et de signal de sortie du filtre utilisant la fenêtre rectangulaire. On peut constater le retard du signal de sortie comparé au signal d'entrée. Celui-ci est dû au décalage de la réponse impulsionnelle appliqué afin de rendre le filtre causal. Le signal de sortie est déformé par rapport au signal d'entrée. Certaines fréquences ont effectivement été supprimées, comme le montre la figure 4.4 qui trace la TFD du signal d'entrée et celle du signal de sortie correspondant.



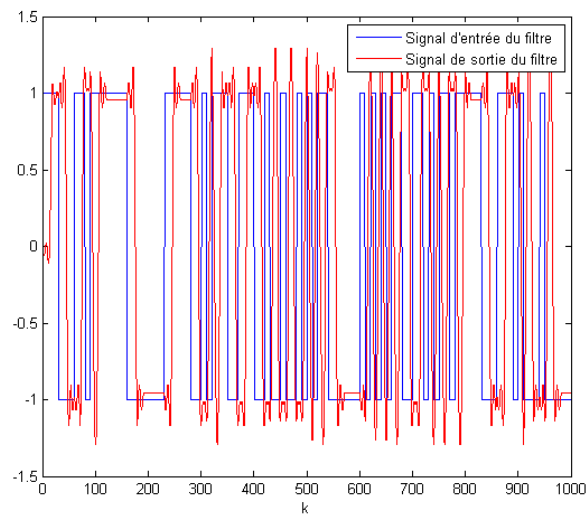


FIGURE 4.3 – Exemple de signaux d'entrée et de sortie du filtre passe-bas de type RIF synthétisé avec les paramètres suivants :  $f_c = 100$  Hz,  $F_e = 800$  Hz,  $ordre = 31$ , fenêtre rectangulaire de troncature.

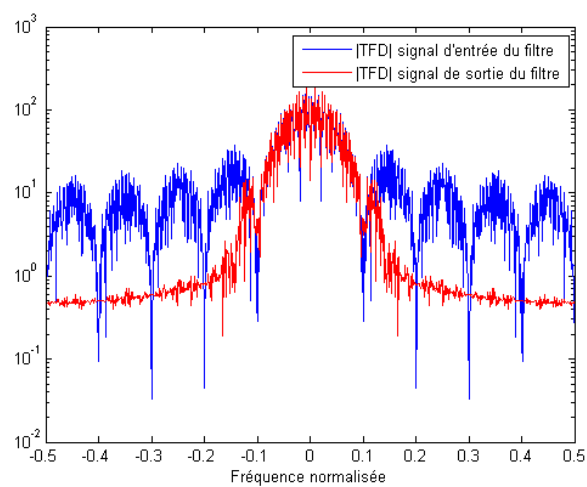


FIGURE 4.4 – TFD des signaux d'entrée et de sortie du filtre passe-bas de type RIF synthétisé avec les paramètres suivants :  $f_c = 100$  Hz,  $F_e = 800$  Hz,  $ordre = 31$ , fenêtre rectangulaire de troncature.

Remarques :

- A partir de la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas il est possible d'obtenir les réponses impulsionnelles des autres filtres de base (passe-haut, passe-bande, rejeteur).

Par exemple, un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure  $\tilde{f}_c$  présente une réponse en fréquence

$$H_{IPH}(\tilde{f}) = 1 - H_{IPB}(\tilde{f})$$

où  $H_{IPB}(\tilde{f})$  est la réponse en fréquence du filtre passe-bas idéal de même fréquence de coupure. On peut donc en déduire la réponse impulsionnelle du filtre passe-haut idéal,  $h_{IPH}(n)$ , à partir de celle du filtre passe-bas idéal correspondant,  $h_{IPB}(n)$  :

$$h_{IPH}(n) = \delta(n) - h_{IPB}(n)$$

Cette réponse impulsionnelle idéale sera ensuite tronquée à  $2N + 1$  coefficients pour donner  $h_{PH}(n)$ , réponse impulsionnelle recherchée.

- La fonction `filter.m` de Matlab permet de réaliser le filtrage du signal  $x$  pour donner le signal  $y$  en utilisant un filtre défini par les tableaux de coefficients  $A = [a_0 \dots a_{M-1}]$  et  $B = [b_0 \dots b_{M-1}]$  :  $y = \text{filter}(B, A, x)$ . Dans le cas d'un filtre RIF le tableau de coefficients  $A$  se résume à un seul coefficient  $a_0 = 1$  et le tableau  $B$  contient les  $2N + 1$  éléments conservés sur la réponse impulsionnelle pour un filtre d'ordre  $2N + 1$  :  $B = [h_{PB}(-N) \dots h_{PB}(N)]$ . Notons qu'un filtrage de type RIF peut également être réalisé en utilisant la fonction `conv.m` de Matlab :  $y = \text{conv}(x, B, 'same')$ , le paramètre 'same' n'est pas obligatoire mais il permet de ne pas avoir à gérer soi-même le retard introduit par le filtre (permet de gérer les effets de bord de la convolution et renvoie la partie centrale du résultat de la convolution avec une taille égale à celle du premier vecteur).

**Exercice 4.4 — Etude de la cellule du second ordre.**

1. Cellule du second ordre purement récursive On la définit par l'équation aux différences suivantes :

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$$

- (a) Exprimez sa fonction de transfert en  $z$ .
- (b) Dans le plan des coefficients ( $a_1$  en abscisse,  $a_2$  en ordonnées), tracez le domaine de stabilité du filtre.
- (c) Donnez l'expression de la réponse en fréquence en fonction de  $a_1$  et  $a_2$ .
- (d) A quelle condition existe-t-il une pulsation de résonance  $\tilde{\omega}_0$  ( $\tilde{\omega} = 2\pi\tilde{f}$ ) ?
- (e) Montrez que la valeur du module de la réponse harmonique à la résonance est inversement proportionnelle à la distance des pôles au cercle de rayon 1. On se placera dans le cas où  $a_1^2 < 4a_2$  (vraie cellule du second ordre) et on écrira la réponse en fréquence en  $\tilde{\omega}_0$  sous forme polaire. On donne :

$$|H(\tilde{\omega}_0)| = \frac{2\sqrt{a_2}}{(1-a_2)\sqrt{4a_2-a_1^2}}$$

- (f) Donnez l'expression de la réponse impulsionnelle en fonction des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  des pôles dans le cas où  $a_1^2 < 4a_2$ .
- (g) Proposez une structure de réalisation de ce filtre.
2. Cellule du second ordre générale On considère une équation générale de la cellule du second ordre :

$$y(n) = x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$$

- (a) Exprimez sa fonction de transfert en  $z$ .
- (b) Montrez que cette cellule du second ordre peut être considérée comme la mise en cascade de la cellule purement récursive précédente et d'un filtre RIF.
- (c) En déduire une structure de réalisation.
- (d) Pour  $b_2 = 1$  montrez que la phase du RIF est linéaire.

*Correction.*

1. Cellule du second ordre purement récursive

(a)  $y(n) = x(n) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2) \xrightarrow{TZ} Y(z) = X(z) - a_1z^{-1}Y(z) - a_2z^{-2}Y(z)$ .

D'où la fonction de transfert du filtre :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

- (b) Un filtre numérique est stable si les pôles de sa fonction de transfert  $H(z)$  sont inclus dans le cercle de rayon 1. Cherchons les pôles de  $H(z)$  :

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + a_1z + a_2} = \frac{z^2}{a(z - z_1)(z - z_2)}$$

Il faut résoudre  $z^2 + a_1z + a_2 = 0$ . On calcule donc  $\Delta = a_1^2 - 4a_2$  et on doit considérer les 3 cas possibles :

- i.  $\Delta < 0$  : Deux pôles complexes conjugués de modules  $= \sqrt{a_2}$ . Il faudra donc que  $|a_2| < 1$ . On est dans le cas d'une vraie cellule du second ordre.
- ii.  $\Delta = 0$  : Un pôle double  $z_0 = -\frac{a_1}{2}$ . Il faudra donc que  $|a_1| < 2$ .
- iii.  $\Delta > 0$  : Deux pôles réels (deux cellules du premier ordre) :

$$z_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2}, z_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

En remarquant que  $-1 \leq z_1 \leq z_2 \leq 1$ , on arrive aux conditions suivantes :  $a_2 \geq a_1 - 1$ ,  $a_2 \geq -a_1 - 1$  et  $-2 \leq a_1 \leq 2$ .

On regroupe ensuite tous les cas possibles pour obtenir, dans le plan des coefficients  $(a_1, a_2)$ , le domaine de stabilité du filtre qui est un triangle : figure 4.5.

- (c)

$$|H(\tilde{\omega})|^2 = \left[ H(z)H\left(\frac{1}{z}\right) \right]_{z=e^{j\tilde{\omega}}}$$

Ce qui donne :

$$|H(\tilde{\omega})|^2 = \frac{1}{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1(1 + a_2)\cos(\tilde{\omega}) + 2a_2\cos(2\tilde{\omega})}$$

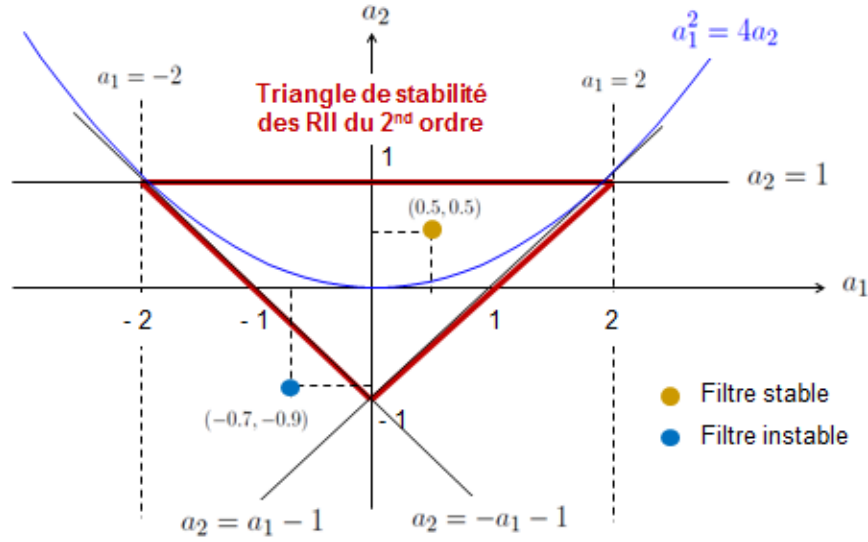


FIGURE 4.5 – Triangle de stabilité des filtres numériques du second ordre.

- (d) En dehors de  $\tilde{\omega} = 0$  et  $\tilde{\omega} = 2\pi \times 0.5$ , l'annulation de la dérivée de  $|H(\tilde{\omega})|^2$  montre qu'elle passe par un maximum pour  $\cos(\tilde{\omega}_0) = -\frac{a_1(1+a_2)}{4a_2}$ . On a donc résonance si  $\left| \frac{a_1(1+a_2)}{4a_2} \right| \leq 1$ .
- (e) On a  $\cos(\tilde{\omega}_0) = -\frac{a_1(1+a_2)}{4a_2}$  et  $\cos(2\tilde{\omega}_0) = 2\frac{a_1^2(1+a_2)^2}{16a_2} - 1$ , ce qui donne, après calculs :

$$|H(\omega_0)| = \frac{2\sqrt{a_2}}{(1-a_2)\sqrt{4a_2-a_1^2}}$$

Pour  $z_1 = re^{j\theta}$  et  $z_2 = re^{-j\theta}$  (pôles complexes conjugués) :  $a_2 = r^2$  et  $a_1 = -2r\cos(\theta)$  et donc :

$$|H(\omega_0)| = \frac{1}{(1-r)(1+r)\sin(\theta)}$$

La valeur du module de la réponse harmonique à la résonance est bien inversement proportionnelle à la distance des pôles au cercle unité. Plus le pôle est proche du cercle ( $a_2$  proche de 1) plus la résonance sera forte. On peut donc lier la position des pôles dans le cercle de rayon 1 du plan complexe avec l'effet spectral produit.

(f)

$$H(z) = \frac{1}{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})} = \frac{z_1}{z_1-z_2} \frac{1}{1-z_1z^{-1}} + \frac{z_2}{z_2-z_1} \frac{1}{1-z_2z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{TZ^{-1}} h(n) = \frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2} u(n) = r^n \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} u(n)$$

(g) La figure 4.6 propose une structure de réalisation pour ce filtre.

2. Cellule du second ordre générale

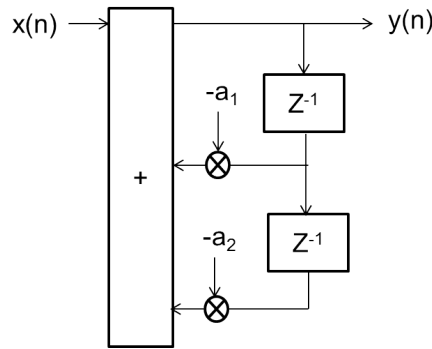


FIGURE 4.6 – Structure de réalisation de la cellule du second ordre purement réursive.

(a)

$$y(n) = x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$$

$$\xrightarrow{TZ} Y(z) = X(z) + b_1z^{-1}X(z) + b_2z^{-2}X(z) - a_1z^{-1}Y(z) - a_2z^{-2}Y(z)$$

D'où la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

(b)

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \times (1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})$$

(c) En cascade la cellule du second ordre purement réursive (RII) et le filtre RIF (figure 4.7), on peut écrire les relations suivantes :

$$Y_1(z) = X(z) \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \xrightarrow{TZ^{-1}} y_1(n) = x(n) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$$

$$Y(z) = Y_1(z) (1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}) \xrightarrow{TZ^{-1}} y(n) = y_1(n) + b_1y_1(n-1) + b_2y_1(n-2)$$

D'où la structure de réalisation donnée par la figure 4.8. Il s'agit d'une structure canonique (une seule ligne à retard en cascade RII puis RIF).

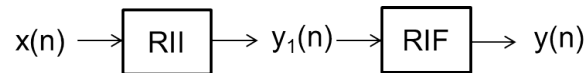


FIGURE 4.7 – Cascade d'un filtre RIF et d'un filtre RII.

(d) Pour  $b_2 = 1$  on a :  $H_{RIF}(z) = 1 + b_1z^{-1} + z^{-2}$ . Et donc :

$$H_{RIF}(\tilde{\omega}) = e^{-j\tilde{\omega}}(b_1 + 2\cos(\tilde{\omega})) \Rightarrow \text{Arg}[H_{RIF}(\tilde{\omega})] = -\tilde{\omega}$$

On a bien une phase linéaire. On aurait pu dire que le temps de propagation de groupe était constant en regardant  $h_{RIF} = [1 \ b_1 \ 1]$  qui est symétrique. ■

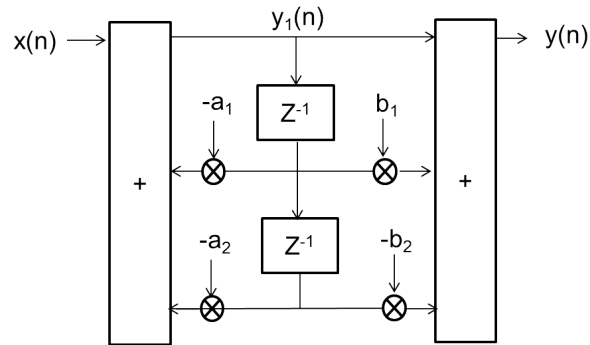
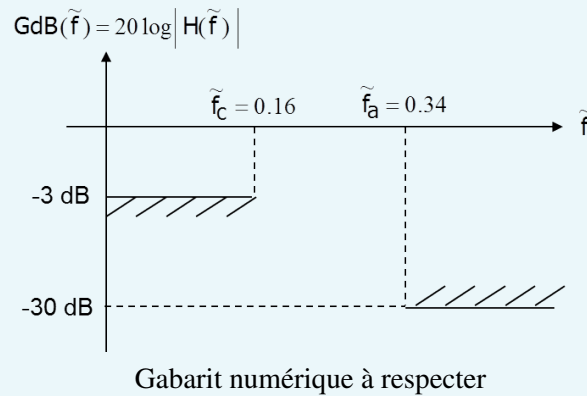


FIGURE 4.8 – Structure canonique de réalisation de la cellule du second ordre.

**Exercice 4.5 — Exemple de synthèse RII guidée.** On se propose de synthétiser un filtre passe-bas numérique de type RII. Le gabarit à respecter est donné par la figure suivante.



- Afin de simplifier les calculs la fréquence d'échantillonnage sera considérée égale à 1 Hz.
1. La synthèse de filtre RII est une méthode de synthèse numérique qui utilise la synthèse analogique. Cette synthèse analogique a besoin en entrée d'un gabarit analogique à respecter. On passera donc dans un premier temps du gabarit numérique sur  $H(\tilde{f})$  au gabarit d'entrée de la synthèse analogique portant sur  $H(f)$ . Tracez le gabarit à respecter par  $H(f)$ .
  2. Réalisation de la synthèse analogique :
    - (a) Première étape : on doit choisir une fonction modèle analogique et régler ses paramètres afin de satisfaire le gabarit souhaité. On impose dans cet exercice d'utiliser le modèle passe-bas de Butterworth, dont la fonction de transfert est donnée par :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}},$$

où  $\omega_c$  représente la pulsation de coupure. Montrez que le paramètre  $N$  permettant au modèle de Butterworth de satisfaire le gabarit à moindre coût est égal à 3.

(b) Deuxième étape : passer de  $|H(\omega)|^2$  à  $H(p)$ .

$$|H(\omega)|^2 = \left[ |H(p)|^2 \right]_{p=j\omega}$$

d'où pour  $N = 3$  :

$$|H(p)|^2 = \frac{1}{1-p^6} = H(p)H(-p)$$

(on oublie pour l'instant le  $\frac{1}{\omega_c}$ , sachant qu'on remplacera  $p$  par  $\frac{p}{\omega_c}$  à la fin).

Parmi les 6 pôles de  $|H(p)|^2$  (qui sont les racines sixièmes de l'unité), 3 appartiennent à  $H(p)$ , 3 appartiennent à  $H(-p)$ . On choisira comme pôles pour  $H(p)$  :  $p_0 = -1$ ,  $p_1 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $p_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Expliquez ce qui conduit à ce choix. On en déduit donc la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

soit en remplaçant  $p$  par  $\frac{p}{\omega_c}$  :

$$H(p) = \frac{\omega_c^3}{(p+\omega_c)(p^2+p\omega_c+\omega_c^2)}$$

(c) Troisième étape : Application de la transformée bilinéaire. Après application de la transformée bilinéaire sur  $H(p)$  on obtient la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

avec

$$H_1(z) = \frac{0.43(1+z^{-1})}{1-0.29z^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{0.135+0.27z^{-1}+0.135z^{-2}}{1-0.753z^{-1}+0.4z^{-2}}$$

3. Le filtre obtenu est-il stable ? Justifiez votre réponse.
4. Le filtre obtenu est-il résonnant ? Justifiez votre réponse.
5. On souhaite filtrer un signal  $x$  en utilisant le filtre RII synthétisé. En appelant  $y$  le signal de sortie, proposer un programme matlab permettant de passer de  $x$  à  $y$ . Ce programme pourra être testé pour filtrer des sinusoïdes lors des séances de TP.

*Correction.*

1. Les atténuations du gabarit analogique restent identiques à celle du gabarit numérique mais l'axe de fréquence doit subir la prédistorsion suivante :

$$f = \frac{1}{\pi T_e} \tan(\pi \tilde{f})$$

qui conduit au gabarit de la figure 4.9.

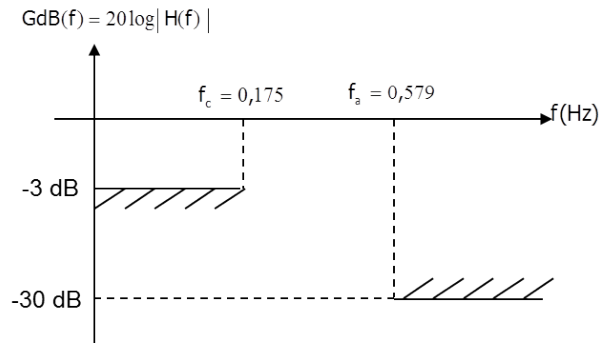


FIGURE 4.9 – Gabarit analogique à respecter

## 2. Réalisation de la synthèse analogique :

- (a) Première étape : L'atténuation pour  $\omega = \omega_c = 2\pi f_c$  est fixée à  $-3$  dB, le paramètre  $N$  va permettre de satisfaire à l'atténuation minimale souhaitée en bande atténuée. On souhaite :

$$10 \log_{10} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2N}} \leq -30 \text{ dB} = 10 \log \frac{1}{10^3}$$

où  $\omega_a = 2\pi f_a$ . Connaissant  $\omega_c = 2\pi \times 0,175$  rad/s, cela conduit à choisir  $N = 3$ .

- (b) Deuxième étape : Les pôles choisis sont à parties réelles négatives et conduiront donc à un filtre stable.

On en déduit donc la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

soit en remplaçant  $p$  par  $\frac{p}{\omega_c}$  :

$$H(p) = \frac{\omega_c^3}{(p + \omega_c)(p^2 + p\omega_c + \omega_c^2)}$$

- (c) Troisième étape : On obtient la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

avec

$$H_1(z) = \frac{0.43(1+z^{-1})}{1-0.29z^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{0.135 + 0.27z^{-1} + 0.135z^{-2}}{1 - 0.753z^{-1} + 0.4z^{-2}}$$

3. Le filtre obtenu est décomposé en un filtre du premier ordre qui est stable car son pôle  $(0,29)$  est de module inférieur à 1 et un filtre du second ordre qui est également stable car  $(a_1, a_2) = (-0.753, 0.4)$  appartient au triangle de stabilité (voir exercice précédent).

4. Le filtre obtenu n'est pas résonnant car  $\left| \frac{a_1(1+a_2)}{4a_2} \right| = 6.588 > 1$  (voir exercice précédent).



5. Afin de filtrer un signal  $x$  en utilisant ce filtre RII, on pourra écrire sous Matlab :

$$y1 = \text{filter}([0.43 \ 0.43], [1 \ -0.29], x);$$

$$y = \text{filter}([0.135 \ 0.27 \ 0.135], [1 \ -0.753 \ 0.4], y1);$$





## Bibliographie

- [Hsu19] H.P. HSU. *Schaum's Outline of Signals and Systems, Fourth Edition*. McGraw-Hill Education, 2019.
- [PP02] A. PAPOULIS et S. U. PILLAI. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. 4th. Boston, USA : McGraw-Hill, 2002.
- [Pic93] B. PICINBONO. *Random Signals and Systems*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1993.
- [Sol06] B. SOLAIMAN. *Processus stochastiques pour l'ingénieur*. Lausanne, Switzerland : Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.
- [VKG14] M. VETTERLI, J. KOVAČEVIĆ et V.K. GOYAL. *Foundations of Signal Processing*. Cambridge University Press, 2014.
- [Yag62] A. M. YAGLOM. *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice Hall, 1962.
- [Zak05] A. ZAKNICH. *Principles of Adaptive Filters and Self-Learning Systems*. London : Springer, 2005.



Version 1.0 du

5 octobre 2022