CORRECTION DES EXERCICES DU TD2 DE TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année

Exercice 1 : Filtre moyenneur à mémoire finie

Le filtre moyenneur à mémoire finie est un système défini par la relation entrée-sortie suivante :

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)du,$$

où $x(t)$ représente l'entrée du filtre et $y(t)$ la sortie.

1. Montrer que ce filtre moyenneur à mémoire finie est un filtre linéaire et calculer sa réponse impulsionnelle.

Il existe plusieurs manières de répondre à cette question

(a) Placer $x(t) = e^{j2\pi ft}$ à l'entrée du filtre et montrer que la sortie $y(t)$ s'écrit alors $y(t) = H(f)e^{j2\pi ft}$.
Ici :

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} e^{j2\pi fu}du = sinc(\pi fT)e^{-j\pi fT}e^{j2\pi ft} = H(f)x(t) \text{ avec } H(f) = sinc(\pi fT)e^{-j\pi fT}$$

On a bien un filtre linéaire de réponse en fréquence

$$H(f) = sinc(\pi fT)e^{-j\pi fT}$$

et donc de réponse impulsionnelle

$$h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

si $\Pi_T\,(t)$ représente une fonction porte de largeur T, de hauteur 1 et centrée en $t = 0$.

(b) Montrer que, pour toute entrée $x(t)$, la sortie $y(t)$ s'écrit $y(t) = x(t)*h(t)$, où $h(t)$ représente la réponse impulsionnelle du filtre et le définit.
Ici :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)du = \frac{1}{T} int_{\mathbb{R}} x(u)\Pi_T\left(u - \left(t - \frac{T}{2}\right)\right)du \\ &= \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} x(u)\Pi_T\left(\left(t - \frac{T}{2}\right) - u\right)du = x(t) * h(t) \end{aligned}$$

avec $h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$. On a donc bien un filtre linéaire, de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$

(c) Placer un dirac en entrée, déterminer la sortie, $h(n)$, correspondante et montrer ensuite que, pour toute entrée $x(t)$, la sortie $y(t)$ peut s'écrire comme $y(t) = x(t) * h(t)$.
Ici si $x(t) = \delta(t)$ alors

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \delta(u)du = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } 0 < t < T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où

$$h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Il faut alors montrer que nous avons bien un filtre, c'est-à-dire que l'on a bien $y(t) = x(t) * h(t)$:

$$x(t) * h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) * x(t) = \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} x(u)\Pi_T\left(t - \frac{T}{2} - u\right)du = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)du = y(t)$$

Nous avons bien affaire à un filtre linéaire.

(d) on peut également dériver :

$$y'(t) = \frac{1}{T}\left\{x(t) - x(t-T)\right\}$$

D'où par transformée de Fourier

$$j2\pi fY(f) = \frac{1}{T}\left\{X(f) - e^{-j2\pi fT}X(f)\right\}$$

Et donc

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1 - e^{-j2\pi fT}}{j2\pi fT} = e^{-j\pi fT} sinc(\pi fT)$$

Ce qui donne par transformée de Fourier inverse :

$$h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

2. Ce filtre est-il réalisable ?
   Un filtre est réalisable si
   – sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est réelle : OK ici
   – sa réponse impulsionnelle est causale : OK ici car pour $t < 0$ on a bien $h(t) = 0$)
   – sa réponse impulsionnelle vérifie la condition de stabilité $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,dt < \infty$: OK ici car $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,dt = \frac{1}{T} \times T = 1$
   Ce filtre est réalisable.

Exercice 2 : Calcul d'un Rapport Signal sur Bruit (RSB) en sortie d'un filtre linéaire

Considérons un filtre linéaire de réponse en fréquence :

$$H(f) = \frac{1}{\theta + j2\pi f}$$

On applique à l'entrée de ce filtre un processus aléatoire $X(t)$ constitué de la somme d'un signal sinusoïdal $s(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$, où f_0 et A sont des constantes et d'un bruit blanc stationnaire réel $B(t)$, de densité spectrale de puissance $s_B(f) = \frac{N_0}{2} \forall f$:

$$X(t) = s(t) + B(t)$$

Le filtre étant linéaire, la sortie du filtre s'écrit :

$$Y(t) = Y_s(t) + Y_B(t)$$

où $Y_s(t)$ représente la réponse du filtre à l'entrée $s(t)$ et $Y_B(t)$ représente la réponse du filtre à l'entrée $B(t)$.

1. Donner l'expression du rapport Signal sur Bruit à la sortie du filtre :

$$RSB = \frac{P_{Y_s}}{P_{Y_B}}$$

   où P_{Y_s} représente la puissance du signal $Y_s(t)$ et P_{Y_B} la puissance du signal $Y_B(t)$.

$$P_{Y_s} = \int_{\mathbb{R}} S_{Y_s}(f)df = \int_{\mathbb{R}} S_s(f)\,|H(f)|^2\,df = \int_{\mathbb{R}} \frac{A^2}{4}\left\{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right\}\frac{1}{\theta^2 + 4\pi^2 f^2}df = \frac{A^2}{4}\frac{1}{\theta^2 + 4\pi^2 f_0^2} \times 2$$

$$P_{Y_B} = \int_{\mathbb{R}} S_{Y_B}(f)df = \int_{\mathbb{R}} S_B(f)\,|H(f)|^2\,df = \int_{\mathbb{R}} \frac{N_0}{2}\frac{1}{\theta^2 + 4\pi^2 f^2}df = \frac{N_0}{4\pi\theta}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+u^2}du = \frac{N_0}{4\pi\theta}\left[arctan(u)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{N_0}{4\theta}$$

   Autre solution (en utilisant les tables de TF) :

$$R_{Y_B}(\tau) = TF^{-1}\left[S_{Y_B}(f)\right] = \frac{N_0}{4\theta}e^{-\theta|\tau|} \text{ qui donne } P_{Y_B} = R_{Y_B}(0) = \frac{N_0}{4\theta}$$

   D'où l'expression du rapport signal sur bruit en sortie du filtre :

$$RSB = \frac{2\theta A^2}{N_0}\frac{1}{\theta^2 + 4\pi^2 f_0^2}$$

2. Montrer qu'il est maximal pour $\theta = 2\pi f_0$.

$$\frac{dRSB}{d\theta} = 2\frac{A^2}{N_0}\frac{4\pi^2 f_0^2 - \theta^2}{\left(4\pi^2 f_0^2 + \theta^2\right)^2} \text{ et donc } \frac{dRSB}{d\theta} = 0 \text{ pour } \theta = 2\pi f_0$$

Exercice 3 : Filtrage non linéaire de type exponentiel

On considère un filtre non linéaire de type exponentiel. Si $X(t)$ est l'entrée du filtre, la sortie $Y(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \exp(X(t))$$

L'entrée du filtre est un bruit gaussien, réel, centré, de variance σ^2.

1. Calculez la moyenne du signal en sortie du filtre.

$$m_Y = E[Y(t)] = E\left[e^{X(t)}\right] = e^{\frac{\sigma^2}{2}} \text{ (voir remarque)}$$

2. Calculez la variance du signal en sortie du filtre.

$$Var_Y = E\left[(Y(t) - m_Y)^2\right] = E\left[Y^2(t)\right] - m_Y^2 = E\left[e^{2X(t)}\right] - e^{\sigma^2} = e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}$$

3. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal en sortie du filtre en fonction de celle du signal à l'entrée.

On utilise le théorème de Price :

$$\frac{\partial E[Y_1(t)Y_2(t)]}{\partial E[X_1(t)X_2(t)]} = E\left[\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}\frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right]$$

avec

$$X_1(t) = X(t),\ Y_1(t) = e^{X(t)} = Y(t)$$

et

$$X_2(t) = X(t-\tau),\ Y_2(t) = e^{X(t-\tau)} = Y(t-\tau)$$

Cela donne :

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = E\left[e^{X(t)}e^{X(t-\tau)}\right] = E[Y(t)Y(t-\tau)] = R_Y(\tau)$$

Et donc

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{R_Y(\tau)} = \partial R_X(\tau)$$

Soit

$$\ln R_Y(\tau) = R_X(\tau) + K \text{ (K constante) donnant } R_Y(\tau) = e^{K+R_X(\tau)}$$

Calcul de K :

$$R_Y(0) = e^{K+\sigma^2} = E\left[Y^2(t)\right] = E\left[e^{2X(t)}\right] = e^{2\sigma^2}$$

D'où $K = \sigma^2$

Et

$$R_Y(\tau) = e^{\sigma^2}e^{R_X(\tau)}$$

Remarques :

- Si la variable aléatoire Z suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et u est une constante alors on a :

$$E\left[e^{uZ}\right] = \exp\left(mu + \frac{\sigma^2}{2}u^2\right)$$

- Le rapport Signal sur Bruit en décibels (dB) est défini par : $RSB = 10\log_{10}\left(\frac{P_{Y_s}}{P_{YB}}\right)$ (dB). On le note aussi SNR (Signal to Noise Ratio).