CORRECTION DES EXERCICES DU TD3 DE TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année

Exercice 1 : Effet de l'échantillonnage

Soit le signal suivant : $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz.

1. Tracer la transformée de Fourier de $x(t)$: $X(f)$.
   La transformée de Fourier de $x(t)$, $X(f)$, est tracée sur la figure 1.

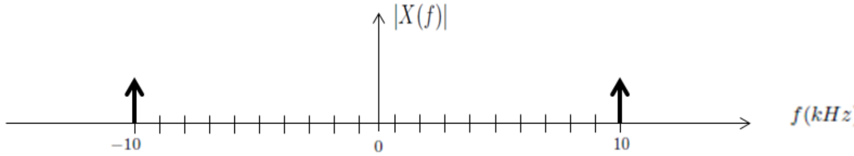

FIGURE 1 – Transformée de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz.

2. Est-il possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information ? Si oui à quelle condition ?
   Il est possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information en utilisant une fréquence d'échantillonnage

$$F_e > 2f_0 = 20 \text{ kHz (respect de la condition de Shannon)}$$

3. Tracer, entre 0 et F_e, la transformée de Fourier de $x(t)$ échantillonné à $T_e = 1/F_e$ quand :
   (a) $F_e = 30$ kHz.
   (b) $F_e = 8$ kHz.
   La transformée de Fourier de $x(t)$, échantillonné à $T_e = 1/F_e$, est tracée entre 0 et F_e sur la figure 2 quand $F_e = 30$ kHz et sur la figure 3 quand $F_e = 8$ kHz.

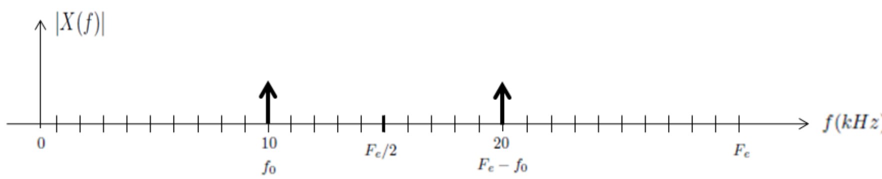

FIGURE 2 – Transformée de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz, $F_e = 30$ kHz.

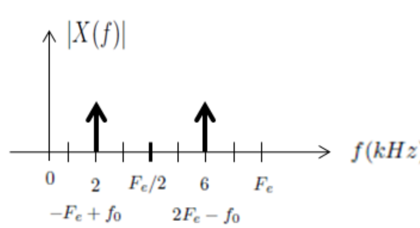

FIGURE 3 – Transformée de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz, $F_e = 8$ kHz.

4. A partir des échantillons nous souhaitons reconstruire $x(t)$ par filtrage passe-bas à $F_e/2$. Quels seront les signaux obtenus pour chaque fréquence d'échantillonnage précédente ?
   Par filtrage passe-bas à $F_e/2$, nous obtenons

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ \text{avec} f_0 = 10 \text{ kHz pour } F_e = 30 \text{ kHz}$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t),\ \text{avec} f_1 = 2 \text{ kHz pour } F_e = 8 \text{ kHz}$$

Exercice 2 : Echantillonneur moyenneur

L'échantillonneur moyenneur est une méthode pratique d'échantillonnage qui consiste à calculer, toutes les T_e secondes (période d'échantillonnage), la valeur moyenne du signal pendant un intervalle de temps θ ($\theta << T_e$) et à affecter cette valeur moyenne à l'échantillon discrétisé :

$$\begin{aligned} y(kT_e) &= \frac{1}{\theta}\int_{kT_e-\theta}^{kT} x(u)du \\ x_{ech}(t) &= \sum_k y(kT_e)\,\delta(t-kT_e) \end{aligned}$$

1. Démontrer que le signal échantillonné $x_{ech}(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$x_{ech}(t) = \frac{1}{\theta}\left[\Pi_\theta(t) * x\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right].\,Ш_{T_e}(t)$$

   où $\Pi_\theta(t)$ et $Ш_{T_e}(t)$ représentent respectivement la fenêtre rectangulaire de largeur θ et le peigne de Dirac de période T_e.

$$x_{ech}(t) = \sum_k y(kT_e)\,\delta(t-kT_e) = y(t)\sum_k \delta(t-kT_e) = y(t).\,Ш_{T_e}(t)$$

   Reste à montrer que

$$y(t) = \frac{1}{\theta}\left[\Pi_\theta(t) * x\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{\theta}\int_{t-\theta}^{t} x(u)du = \frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\times\Pi_\theta\left(u-\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right)du = \frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\times\Pi_\theta\left(\left(t-\frac{\theta}{2}\right)-u\right)du = \frac{1}{\theta}(x*\Pi_\theta)\left(t-\frac{\theta}{2}\right)$$

2. En déduire la transformée de Fourier correspondante $X_{ech}(f)$.

$$X_{ech}(f) = Y(f) * \frac{1}{T_e}Ш_{1/T_e}(f) = \frac{1}{T_e}\sum_k Y\left(f-\frac{k}{T_e}\right),\ \text{avec } Y(f) = sinc(\pi f\theta)X(f)e^{-j\pi f\theta}$$

3. En considérant un signal à support spectral borné $2\Delta f$ et en prenant en compte que la fonction $sinc(\pi\theta f)$ peut être supposée constante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$

$$sinc(\pi\theta f) = \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} \approx 1 \text{ pour } f \in \left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$$

   (a) quelle(s) condition(s) doit vérifier θ pour que le signal $x(t)$ puisse être restitué par filtrage de $x_{ech}(t)$?
   Il faut que $\Delta f \leq \frac{1}{3\theta} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{1}{3\Delta f}$

   (b) Dans ces conditions peut-on échantillonner à la fréquence de Shannon ?
   Après filtrage antialiasing on pourra prendre F_e tel que $\Delta f < \frac{F_e}{2} = \frac{1}{2T_e} \Leftrightarrow T_e < \frac{1}{2\Delta f}$

Exercice 3 : Echantillonnage d'un signal à spectre non borné

Soit le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $x(t)$. Tracer $|X(f)|$.

$$X(f) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

2. Le signal $x(t)$ est-il échantillonnable sans perte d'information ? Expliquez votre réponse.
   Non car le spectre n'est pas borné. Il n'est donc pas possible d'appliquer la condition de Shannon.

3. En considérant la transformée de Fourier comme négligeable pour une atténuation minimale de 40 dB par rapport à sa valeur maximum, dimensionner la fréquence d'échantillonnage, F_e, à utiliser.
   On a le maximum du spectre pour $f = 0$. On souhaite donc trouver F_{max} telle que :

$$10 \log_{10} |X(F_{max})|^2 \leq 10 \log_{10} |X(0)|^2 - 10 \log_{10} \left(10^4\right) = 10 \log_{10} \frac{|X(0)|^2}{10^4}$$

   D'où

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 F_{max}^2}} \leq \frac{1}{10^4 a^2}$$

   et donc

$$F_{max}^2 \geq \frac{\left(10^4 - 1\right) a^2}{4\pi^2}$$

   Soit, en négligeant 1 devant 10^4 :

$$F_{max} \geq \frac{100a}{2\pi} \text{ et donc } F_e \geq \frac{100a}{\pi}$$

4. Une fois F_e déterminée, quel traitement doit-on appliquer au signal avant de l'échantillonner ?
   Un filtre anti repliement afin de tronquer le spectre du signal à F_{max}.