TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année
TD3 : ECHANTILLONNAGE

Exercice 1 : Effet de l'échantillonnage

Soit le signal suivant : $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz.

1. Tracer la transformée de Fourier de $x(t)$: $X(f)$.
2. Est-il possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information ? Si oui à quelle condition ?
3. Tracer, entre 0 et F_e, la transformée de Fourier de $x(t)$ échantillonné à $T_e = 1/F_e$ quand :
   (a) $F_e = 30$ kHz.
   (b) $F_e = 8$ kHz.
4. A partir des échantillons nous souhaitons reconstruire $x(t)$ par filtrage passe-bas à $F_e/2$. Quels seront les signaux obtenus pour chaque fréquence d'échantillonnage précédente ?

Exercice 2 : Echantillonneur moyenneur

L'"échantillonneur moyenneur est une méthode pratique d'échantillonnage qui consiste à calculer, toutes les T_e secondes (période d'échantillonnage), la valeur moyenne du signal pendant un intervalle de temps θ ($\theta << T$) et à affecter cette valeur moyenne à l'échantillon discrétisé :

$$\begin{aligned} y(kT_e) &= \frac{1}{\theta}\int_{kT_e-\theta}^{kT_e} x(u)du \\ x_{ech}(t) &= \sum_k y(kT_e)\,\delta(t-kT_e) \end{aligned}$$

1. Démontrer que le signal échantillonné $x_{ech}(t)$ peut se mettre sous la forme :
$$x_{ech}(t) = \frac{1}{\theta}\left[\Pi_\theta(t) * x\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right].\text{Ш}_{T_e}(t)$$
où $\Pi_\theta(t)$ et $\text{Ш}_{T_e}(t)$ représentent respectivement la fenêtre rectangulaire de largeur θ et le peigne de Dirac de période T_e.
2. En déduire la transformée de Fourier correspondante $X_{ech}(f)$.
3. En considérant un signal à support spectral borné $2\Delta f$ et en prenant en compte que la fonction $sinc(\pi\theta f)$ peut être supposé constante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3\theta},\frac{1}{3\theta}\right]$
$$sinc(\pi\theta f) = \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} \approx 1 \text{pour } f \in \left[-\frac{1}{3\theta},\frac{1}{3\theta}\right]$$
   (a) quelle(s) condition(s) doit vérifier θ pour que le signal $x(t)$ puisse être restitué par filtrage de $x_{ech}(t)$?
   (b) Dans ces conditions peut-on échantillonner à la fréquence de Shannon ?

Exercice 3 : Echantillonnage d'un signal à spectre non borné

Soit le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $x(t)$. Tracer $|X(f)|$.
2. Le signal $x(t)$ est-il échantillonnable sans perte d'information ? Expliquez votre réponse.
3. En considérant la transformée de Fourier comme négligeable pour une atténuation minimale de 40 dB par rapport à sa valeur maximum, dimensionner la fréquence d'échantillonnage, F_e, à utiliser.
4. Une fois F_e déterminée, quel traitement doit-on appliquer au signal avant de l'échantillonner ?

Rappels

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at+b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{i2\pi\frac{b}{a}f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n\, X(f)$
$(-i2\pi t)^n\, x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta\left(f-nf_0\right)$
$\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^2\, dt = \int_{\mathbb{R}} \|X(f)\|^2\, df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f\right)$
$\delta\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f-f_0\right)$
$\delta\left(t-t_0\right)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T\left(t\right)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(t-kT\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\, Ш_{1/T}\left(f\right)$
$\cos\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$\sin\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta\left(f-f_0\right)-\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$e^{-a\|t\|}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T\sin c\left(\pi T f\right)$
$\Lambda_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2\left(\pi T f\right)$
$B\sin c\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B\left(f\right)$
$B\sin c^2\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B\left(f\right)$

!!!!!! Attention!!!!!

$\Pi_T\left(t\right)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.
$\Lambda_T\left(t\right)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T\left(t\right)*\Pi_T\left(t\right)=T\ \Lambda_T\left(t\right)$$