CORRECTION DES EXERCICES DU TD1 DE TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année

Exercice 1 : Etude du secteur

On considère dans cet exercice différents modèles du secteur et on étudie la densité spectrale de puissance des signaux obtenus à l'aide de ces modèles.

1. Dans une première approche, on utilise le modèle :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

où $f_0 = 50Hz$ et $A_0 = 220\sqrt{2}V$. Préciser la classe à laquelle appartient le signal $X(t)$ puis déterminer sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$.

– Le signal est déterministe à puissance moyenne finie périodique : en notant $T_0 = \frac{1}{f_0}$, on a

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |X(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t)\, dt \\ &= \frac{A_0^2}{T_0}\int_{T_0} \frac{1}{2}\{1+\cos(4\pi f_0 t)\}\, dt = \frac{A_0^2}{2} < \infty \end{aligned}$$

– Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par :

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} X(t)X^*(t-\tau)dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} A_0^2 \cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 (t-\tau))\, dt \\ &= \frac{A_0^2}{T_0}\int_{T_0} \frac{1}{2}\{\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau)\}\, dt = \frac{A_0^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

– Sa DSP est donnée par :

$$S_X(f) = TF[R_X(\tau)] = \frac{A_0^2}{4}\{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\}$$

2. On considère ensuite le modèle suivant :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

θ étant une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, $f_0 = 50Hz$ et $A_0 = 220\sqrt{2}V$. Préciser la classe à laquelle appartient le signal $X(t)$ puis déterminer sa moyenne, sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$.

– Le signal est aléatoire.
– Sa moyenne est donc donnée par :

$$m_X = E[X(t)] = E[A_0\cos(2\pi f_0 t + \theta)] = A_0\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta) \times \frac{1}{2\pi}d\theta = 0$$

– Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par :

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t)X^*(t-\tau)] = E\left[A_0^2\cos(2\pi f_0 t + \theta)\cos(2\pi f_0 (t-\tau)+\theta)\right] \\ &= \frac{A_0^2}{2}E[\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\theta)] = \frac{A_0^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

Le signal est stationnaire au second ordre car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps.

– Sa DSP est donnée par :

$$S_X(f) = TF[R_X(\tau)] = \frac{A_0^2}{4}\{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\}$$

3. La fréquence du courant électrique n'est jamais exactement $f_0 = 50Hz$. Afin de modéliser les variations en fréquence, on considère le modèle :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f t + \theta)$$

f étant une variable uniformément répartie sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ indépendante de θ. Calculer alors la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.

- Le signal est aléatoire.
- Sa moyenne est donc donnée par :

$$m_X = E[X(t)] = E_{f,\theta}[A_0 \cos(2\pi f t + \theta)] = E_f[E_\theta[A_0 \cos(2\pi f t + \theta)\,|f]] = E_f[0] = 0$$

- Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t)X^*(t-\tau)] = E_f\left[E_\theta\left[A_0^2 \cos(2\pi f t + \theta)\cos(2\pi f (t-\tau) + \theta)\,|f\right]\right] \\
&= E_f\left[\frac{A_0^2}{2}\cos(2\pi f \tau)\right] = \frac{A_0^2}{2}\int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \cos(2\pi f \tau) \times \frac{1}{2\Delta f} df = \frac{A_0^2}{4\Delta f}\left[\frac{\sin(2\pi f \tau)}{2\pi\tau}\right]_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \\
&= \frac{A_0^2}{8\pi\tau\Delta f}\left\{\sin(2\pi(f_0+\Delta f)\tau) - \sin(2\pi(f_0-\Delta f)\tau)\right\} = \frac{A_0^2}{4\pi\tau\Delta f}\sin(2\pi\Delta f\tau)\cos(2\pi f_0 \tau) \\
&= \frac{A_0^2}{2} sinc(2\pi\Delta f \tau)\cos(2\pi f_0 \tau)
\end{aligned}$$

Le signal est stationnaire au second ordre car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps.

- Sa DSP est donnée par :

$$S_X(f) = TF[R_X(\tau)] = \frac{A_0^2}{2}\frac{1}{2\Delta f}\prod_{2\Delta f}(f) * \frac{1}{2}\left\{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right\} = \frac{A_0^2}{8\Delta f}\left\{\prod_{2\Delta f}(f-f_0) + \prod_{2\Delta f}(f+f_0)\right\}$$

Exercice 2 : Modulation d'amplitude

Soit $A(t)$ un signal aléatoire stationnaire, réel, de fonction d'autocorrélation $R_A(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_A(f)$ définie par :

$$S_A(f) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } |f| \leq F \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère le signal $X(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$, avec $F \ll f_0$ et θ une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ indépendante de $A(t)$.

1. Montrer que $X(t)$ est un signal aléatoire stationnaire. Déterminer et représenter graphiquement sa densité spectrale de puissance.
   - Le signal est aléatoire. Pour montrer qu'il est stationnaire il faut montrer que m_X et R_X sont indépendantes du temps.
   - Sa moyenne est donnée par :

$$m_X = E[X(t)] = E[A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)] = E[A(t)]\,E[\cos(2\pi f_0 t + \theta)]$$

   car A et θ sont indépendantes. D'où $m_X = 0$.
   - Sa fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t)X^*(t-\tau)] = E[A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)\,A^*(t-\tau)\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)] \\
&= E[A(t)A^*(t-\tau)]\,E[\cos(2\pi f_0 t + \theta)\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)] = R_A(\tau) \times \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)
\end{aligned}$$

   Le signal est bien stationnaire (au second ordre) car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps.
   - Sa DSP est donnée par

$$\begin{aligned}
S_X(f) &= TF[R_X(\tau)] = S_A(f) * \frac{1}{4}\left\{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{S_A(f-f_0) + S_A(f+f_0)\right\}
\end{aligned}$$

2. Afin de retrouver le signal $A(t)$ à partir de $X(t)$, on construit le signal $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$.

(a) Déterminer et tracer la densité spectrale de puissance de $Y(t)$.

$$R_Y(\tau) = E\left[Y(t)Y^*(t-\tau)\right] = E\left[X(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)\, X^*(t-\tau)\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\theta)\right]$$

Attention ici $X(t)$ et le cosinus ne sont pas indépendants, tous deux dépendent de θ.
D'où

$$\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= E\left[A(t)\cos^2(2\pi f_0 t + \theta)\, A^*(t-\tau)\cos^2(2\pi f_0(t-\tau)+\theta)\right] \\
& R_A(\tau) \times E\left[\frac{1+\cos(4\pi f_0 t + 2\theta)}{2}\,\frac{1+\cos(4\pi f_0(t-\tau)+2\theta)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4} R_A(\tau) E\left[1 + \cos(2\theta + ...) + \cos(2\theta + ...) + \frac{1}{2}\left\{\cos(4\pi f_0 \tau) + \cos(4\theta + ...)\right\}\right] \\
&= \frac{1}{4} R_A(\tau)\left\{1 + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 \tau)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_Y(f) = TF\left[R_Y(\tau)\right] &= \frac{1}{4} S_A(f) * \left\{\delta(f) + \frac{1}{4}\left\{\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0)\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{4} S_A(f) + \frac{1}{16}\left\{S_A(f-2f_0) + S_A(f+2f_0)\right\}
\end{aligned}$$

(b) Quel traitement doit-on utiliser pour retrouver $A(t)$ à partir de $Y(t)$?

Il faudra utiliser un filtre passe-bas pour conserver uniquement la partie $\frac{1}{4}S_A(f)$ et couper la partie qui se trouve autour de $2f_0$