TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année
TD2 : FILTRAGE

Exercice 1 : Filtre moyenneur à mémoire finie

Le filtre moyenneur à mémoire finie est un système défini par la relation entrée-sortie suivante :

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)du,$$

où $x(t)$ représente l'entrée du filtre et $y(t)$ la sortie.

1. Montrer que ce filtre moyenneur à mémoire finie est un filtre linéaire et calculer sa réponse impulsionnelle.
2. Ce filtre est-il réalisable ?

Exercice 2 : Calcul d'un Rapport Signal sur Bruit (RSB) en sortie d'un filtre linéaire

Considérons un filtre linéaire de réponse en fréquence :

$$H(f) = \frac{1}{\theta + j2\pi f}$$

On applique à l'entrée de ce filtre un processus aléatoire $X(t)$ constitué de la somme d'un signal sinusoïdal $s(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$, où f_0 et A sont des constantes et d'un bruit blanc stationnaire réel $B(t)$, de densité spectrale de puissance $s_B(f) = \frac{N_0}{2} \forall f$:

$$X(t) = s(t) + B(t)$$

Le filtre étant linéaire, la sortie du filtre s'écrit :

$$Y(t) = Y_s(t) + Y_B(t)$$

où $Y_s(t)$ représente la réponse du filtre à l'entrée $s(t)$ et $Y_B(t)$ représente la réponse du filtre à l'entrée $B(t)$.

1. Donner l'expression du rapport Signal sur Bruit à la sortie du filtre :

   $$RSB = \frac{P_{Y_s}}{P_{Y_B}}$$

   où P_{Y_s} représente la puissance du signal $Y_s(t)$ et P_{Y_B} la puissance du signal $Y_B(t)$.
2. Montrer qu'il est maximal pour $\theta = 2\pi f_0$.

Remarque : Le rapport Signal sur Bruit en décibels (dB) est défini par : $RSB = 10\log_{10}\left(\frac{P_{Y_s}}{P_{YB}}\right)$ (dB). On le note aussi SNR (Signal to Noise Ratio).

Exercice 3 : Filtrage non linéaire de type exponentiel

On considère un filtre non linéaire de type exponentiel. Si $X(t)$ est l'entrée du filtre, la sortie $Y(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \exp(X(t))$$

L'entrée du filtre est un bruit gaussien, réel, centré, de variance σ^2.

1. Calculez la moyenne du signal en sortie du filtre.
2. Calculez la variance du signal en sortie du filtre.
3. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal en sortie du filtre en fonction de celle du signal à l'entrée.

Remarque : Si la variable aléatoire Z suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et u est une constante alors on a :

$$E\left[e^{uZ}\right] = \exp\left(mu + \frac{\sigma^2}{2}u^2\right)$$

Rappels

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at+b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{i2\pi\frac{b}{a}f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	**Série de Fourier**
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta\left(f-nf_0\right)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f\right)$
$\delta\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f-f_0\right)$
$\delta\left(t-t_0\right)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T\left(t\right)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(t-kT\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}Ш_{1/T}\left(f\right)$
$\cos\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$\sin\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta\left(f-f_0\right)-\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}=T\sin c\left(\pi T f\right)$
$\Lambda_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2\left(\pi T f\right)$
$B\sin c\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B\left(f\right)$
$B\sin c^2\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B\left(f\right)$

!!!!!! Attention!!!!!

$\Pi_T\left(t\right)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.
$\Lambda_T\left(t\right)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T\left(t\right)*\Pi_T\left(t\right)=T\ \Lambda_T\left(t\right)$$